Edyta Juskowiak
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki
Zakład Dydaktyki Matematyki

Pomysł i rozumowanie w procesie rozwiązywania nietypowych zadań matematycznych. Klasyczna metoda pracy oraz z wykorzystaniem IT

ABSTRAKT: Artykuł zawiera opis fragmentu badań mających na celu analizę i opisanie sposobów rozwiązywania pewnej grupy zadań matematycznych z wykorzystaniem narzędzi IT oraz metodą klasyczną przez studentów – przyszłych nauczycieli matematyki. W artykule tym opisany został przebieg pracy dwóch studentów nad jednym zadaniem. Okres zbierania materiału badawczego trwał trzy lata. W tym czasie 17 studentów (po kilku w każdym kolejnym roku trwania badań) kierunku nauczycielskiego na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu podjęło próbę rozwiązania 8 różnych zadań dwoma sposobami – z wykorzystaniem narzędzi IT oraz bez nich. W pracy podjęto próbę odpowiedzi na pytania: Czy studenci, przyszli nauczyciele matematyki, potrafią wykorzystać narzędzia IT do rozwiązania zadań trudnych? Czy potrafią z ich pomocą odkryć pomysł na rozwiązanie zadania? Czy postępują w taki sam sposób, rozwiązując zadania z użyciem IT oraz metodą klasyczną? Czy są gotowi do organizowania procesu uczenia się i nauczania nastawionego na odkrywanie matematyki na drodze rozwiązywania zadań nietypowych?

SŁOWA KLUCZOWE: typologia zadań matematycznych, zadania nietypowe, zadania typu problem, rozumowania, pomysł na rozwiązanie zadania, nowe technologie na lekcji matematyki

Kontakt:	Edyta Juskowiak edyta@amu.edu.pl
Jak cytować:	Juskowiak, E. (2018). Pomysł i rozumowanie w procesie rozwiązywania nietypowych zadań matematycznych. Klasyczna metoda pracy oraz z wykorzystaniem IT. *Forum Oświatowe*, *30*(2), 67–85. Pobrano z http://forumoswiatowe.pl/index.php/czasopismo/article/view/630
How to cite:	Juskowiak, E. (2018). Idea and reasoning in the process of atypical solving: classical method (paper and pencil method) and IT method. *Forum Oświatowe*, *30*(2), 67–85. Retrieved from http://forumoswiatowe.pl/index.php/czasopismo/article/view/630

PODSTAWY TEORETYCZNE

Bez względu na wiek, matematyki uczymy się zawsze tak samo – na drodze rozwiązywania zadań matematycznych. Przed każdym uczniem stawiane są różne typy zadań, które oprócz wprowadzenia, utrwalenia lub odkrycia treści matematycznych mają na celu sprowokowanie lub ukształtowanie umiejętności i aktywności typowych oraz specyficznych dla pracy matematyka. „Różne zadania kształcą bowiem różne funkcje myśli, różne umiejętności, z różnych stron oświetlają teorię i pogłębiają jej rozumienie, sprzyjają przyswajaniu uczniom różnych elementów matematycznej metody, różnymi sposobami utrwalają wiadomości i ćwiczą sprawności matematyczne" (Krygowska, 1977, s. 14). Czy dobór zadań do realizacji na lekcji matematyki jest wynikiem analizy wszystkich możliwych do osiągnięcia przez ucznia umiejętności? To rzadkość, matematyka na lekcji to zestaw kolejnych zadań zaproponowanych przez autorów podręczników (Czajkowska, Orzechowska, 2013) i z tego właśnie powodu uczniowie nie mają szans lub mają je rzadko, by zmierzyć się z zadaniami nietypowymi, które stanowią – jak pisze Krygowska – „zadania pozornie nie mające bezpośredniego związku z materiałem programowym, ale w istocie rzeczy niezwykle cenne dla rozwoju zainteresowań ucznia i wprowadzenia go w matematyczne myślenie" (1977, s. 15).

Ze względu na cele i zadania stojące przed współczesną dydaktyką matematyki istotnym jest podział zadań matematycznych na:

– ćwiczenia,
– zwykłe zastosowania teorii,
– problem[1].

Ćwiczenia mają na celu opanowanie operacji matematycznych występujących często w rozwiązywaniu innych, bardziej złożonych zagadnień (np. operacje numeryczne, algebraiczne, sporządzanie rysunków czy wykresów). Praca nad nimi to najczęściej doskonalenie szybkiej, wstępnej analizy sytuacji, jasna świadomość celu, wykonanie określonych operacji. Zadanie tego typu eksponuje w sposób szczególny sprawność techniczną i mechanizację pewnych operacji przy małym zaangażowaniu myślenia ucznia i wąskim zakresie wykorzystywanej teorii.

Stosując zadania typu zwykłe zastosowania teorii, utrwalamy zastosowanie wiadomości w przypadkach standardowych ze względu na treść i metodę oraz pogłębiamy ro-

[1] Charakterystyka typów zadań została opracowana na podstawie (Krygowska, 1977, s. 20–38).

zumienie teorii. Wyraźne jest tu ukierunkowanie poszukiwania rozwiązania, plan rozwiązania można podać a priori. Zadanie jest na ogół zamknięte ze względu na dane, poprawne rozwiązanie jest jednoznaczne. Wybór metody jest narzucony przez sformułowanie zadania i przydział do określonego działu programu nauczania. Do rozwiązania takiego zadania wystarcza racjonalne wykorzystanie różnych elementów teorii (definicji, twierdzeń i wzorów) oraz wzorców analogicznych zadań. Może ono wymagać inwencji ze strony ucznia i wnikliwości w dokonywaniu przeglądu znanych twierdzeń, a także zróżnicowanej aktywności i samodzielności.

Celem zadań typu problem jest pobudzenie badawczej postawy u uczniów, wszechstronna eksploracja wiedzy i wzbogacenie jej o nowe elementy. W procesie rozwiązania zadań tego typu brakuje jednoznacznego ukierunkowania następujących procesów:

– poszukiwania rozwiązania (rozpoczyna się na ogół od próbnych kroków i matematycznie niesprecyzowanych rozważań);
– przebiegu rozwiązywania;
– sprawdzenia, czy uzyskane rozwiązanie jest poprawne i jedyne.

Zadanie jest otwarte ze względu na: dane (niepełne, zbędne), metodę, kierunek dedukcji i możliwe wnioski. Rozwiązanie problemu wymaga inwencji, pomysłowości i matematycznej wyobraźni, niewystarczająca jest wiedza, sprawność techniczna i doświadczenie w rozwiązywaniu typowych zadań. Angażuje rozwiązującego głęboko i wszechstronnie. Wymaga dobrej znajomości teorii i opanowania pewnych technik myślenia.

Wyróżnione zadania nie stanowią oczywiście klasyfikacji. Różnice i granice pomiędzy nimi nie są ostre i zdecydowanie od poziomu wiedzy i umiejętności ucznia zależy to, czy dane zadanie będzie dla niego problemem, zwykłym zastosowaniem teorii, czy tylko ćwiczeniem. Istotne, by tę głębszą rolę zadań matematycznych uświadamiać przyszłym nauczycielom w procesie przygotowania do zawodu. Najtrudniejszą rzeczą na pewno jest przygotowanie studenta (za chwilę nauczyciela) do samodzielnego rozwiązywania zadań typu problem, wymagających ogromnej wiedzy i umiejętności w zakresie samej matematyki, a także samodzielności i otwartości w stawianiu pytań oraz poszukiwaniu odpowiedzi na nie z wykorzystaniem różnych metod pracy. Z zadaniem typu problem, zadaniem nietypowym, zwykle jest tak, że pomysł na jego rozwiązanie nie pojawia się w trakcie czytania treści zadania, jak to jest w przypadku pozostałych dwóch typów zadań. Jak zatem rozwiązać takie zadanie? Jak znaleźć pomysł na jego rozwiązanie? Jak nauczyć przyszłych nauczycieli radzenia sobie z zadaniami – problemami, by oni później nauczyli tego swoich uczniów?

W matematyce samodzielne dociekanie jest zawsze możliwe i sensowne, niestety częste niepowodzenia w tym zakresie mogą zniechęcić, a nawet bezpowrotnie zrazić. Alan Schoenfeld, doświadczony badacz metody rozwiązywania zadań matematycznych, uczeń Georga Polya, pisze: „W ciągu swojej kariery zawodowej każdy rozwiązujący zadanie kształtuje swój osobisty styl i swoje indywidualne metody. Doskonalenie w systematycznym używaniu tych metod jest często powolnym i bolesnym procesem, który dojrzewa latami, jeżeli w ogóle dojrzewa" (Schoenfeld, 1980, s. 11). Warto zatem uświadomić sobie, jakie są możliwe zabiegi i drogi rozumowania w procesie rozwiązywania nietypowych zadań matematycznych.

Pomysł – bez niego trudno o rozwiązanie zadania typu problem, bo jak już wcześniej zaakcentowano, jest to zadanie nietypowe, otwarte na metodę, wymagające twórczej postawy od rozwiązującego. „Pomysł, przychodzi nam po prostu do głowy, nie wiadomo skąd. Nie pochodzi on z naszej świadomości, nie przychodzi również z zewnątrz poprzez nasze zmysły. Pomysł jednakże musi skądś pochodzić, powiedzmy przeto: pochodzi on z podświadomości" – pisze B.L. van der Waerden (1966, s. 55) i dalej wspomina słowa Hadamarda – „Kiedy obudził mnie gwałtownie ze snu hałas z zewnątrz, zjawiło się nagle dawno poszukiwane rozwiązanie, które nadeszło z zupełnie nieoczekiwanej strony bez żadnego, choćby najkrótszego udziału myśli. Przeżycie to było zupełnie w swoim rodzaju i niesamowite" (Waerden, 1966, s. 55). Podświadomość – zdaniem psychologów – jest olbrzymim magazynem pamięci, w którym znajdują się ślady wszystkich naszych dotychczasowych doświadczeń (Majewska-Opiełka, 2012). Doświadczenia te właściwie wykorzystane, często w procesie długiego, żmudnego i ukierunkowanego poszukiwania, a czasem w chwili namysłu, innym zaś razem po przerwie od podjęcia próby rozwiązania problemu, powinny doprowadzić do odkrycia pomysłu na rozwiązanie zadania.

Wydawać by się mogło, że duża liczba rozwiązanych zadań nietypowych stanowi klucz do sukcesu przy odnajdywaniu pomysłu na rozwiązanie kolejnego trudnego zadania matematycznego. Okazuje się jednak, że: „Nawet produkt wielu godzin pracy i przemyśleń może być bezpowrotnie stracony, jeśli sieć połączeń wiążąca te nowo przemyślane idee z innymi jest słaba" (Schoenfeld, s. 14). A zatem nie wystarczy nauczyć się na pamięć, nie wystarczy być wytrwałym, konieczna jest nieustanna refleksja oraz umiejętność zadawania sobie pytań oraz stosowania narzędzi i metod heurystycznych. To z pewnością trudne, ale nie niemożliwe. G. Polya (1964) w swoim dziele *Jak to rozwiązać?* przekonuje, że nie wynik zadania jest najważniejszy, ale odnalezienie i zrozumienie wszystkich możliwych sposobów jego rozwiązania.

W efekcie wielu lat pracy Polya stworzył plan rozwiązywania zadań typu problem. Najważniejsze jego etapy to:

1. Zrozumienie zadania;
2. Układanie planu rozwiązania;
3. Wykonanie planu;
4. Rzut oka wstecz.

W kroku pierwszym oczekuje się od rozwiązującego zadanie, by uświadomił sobie, czy zna i rozumie pojęcia, czy rozumie pytania, czy potrafi wyróżnić elementy istotne dla uruchomienia procesu poszukiwania rozwiązania, takie jak dane, niewiadome i warunki. Układanie planu może być bardzo długim procesem, bo w tym miejscu właśnie potrzebujemy pomysłu na rozwiązanie. Warto zadać sobie pytanie: Czy znamy jakieś pokrewne zadanie? Jeżeli nie znasz, spróbuj je sformułować i rozwiązać. A jeżeli i to nie pomaga, może mógłbyś rozwiązać tylko część zadania, rozpatrzyć inne dane. Następnie należy wykonać plan, a to jest już znacznie łatwiejsze. Istotne, by zadbać o poprawne wykonanie każdego kroku postępowania. Plan można zrealizować na drodze trzech różnych sposobów postępowania – wnioskowania empirycznego, rozumowania intuicyjnego bądź formalnego, o czym dokładniej będzie w dalszej części artykułu.

Ostatnim krokiem jest „rzut oka wstecz", najczęściej opuszczana faza w procesie rozwiązywania zadań typu problem. „Spoglądając wstecz na otrzymane rozwiązanie, ponownie rozpatrując i analizując wynik i drogę doń prowadzącą, mogliby utwierdzić swoją wiedzę i rozwinąć swoje zdolności do rozwiązywania zadań" – wspomina Polya (1964, s. 35). Zawsze należy sprawdzić poprawność otrzymanego wyniku, zawsze należy sprawdzić poprawność wykonanych kroków w procesie rozwiązania. Chcąc rozwinąć i utrwalić swoją metodę matematyczną, powinniśmy przedyskutować inne pomysły na rozwiązanie zadania, a także zastanowić się, do jakiego innego problem czy nawet prostszego zadania można by wykorzystać otrzymany wynik lub użytą metodę rozwiązania.

O tym, jak ważne jest prowokowanie uczniów, i to od najmłodszych lat, do rozwiązywania zadań typu problem lub nietypowych zadań z tekstem pisze w swojej ostatniej książce Zbigniew Semadeni: „Najbardziej skuteczną metodą kształcenia myślenia matematycznego jest stawianie dzieci wobec odpowiednio dobranych problemów" (2015, s. 146), i dalej: „Badania prowadzone w różnych krajach potwierdzają dawniejsze spostrzeżenia, że spora część uczniów (na różnych szczeblach edukacyjnych) ma wdrukowane fałszywe mniemanie, że każde zadanie matematyczne ma tylko jedno poprawne rozwiązanie. Jest to wynik silnie zakorzenionego w tradycji szkolnej sposobu organizacji lekcji matematyki, przy którym nauczyciel podaje przykładowe zadanie, objaśnia, jak należy je rozwiązać, po czym daje serię podobnych zadań" (2015, s. 81).

Realizacja planu rozwiązania zadania to formalno-intuicyjna myśl matematyczna mająca doprowadzić rozwiązującego do uzyskania poprawnego wyniku. **Wnioskowanie empiryczne** na poziomie nauczania szkolnego to formułowanie hipotezy matematycznej na podstawie:

– obserwacji i doświadczenia w konkretnej fizycznej przestrzeni, które w rezultacie matematyzacji występujących stosunków opisane zostaje z użyciem terminów matematycznych lub
– indukcyjnych prób już w zakresie samej matematyki.

Rozumowanie ucznia traktowane jest jako **intuicyjne** w dziedzinie matematyki, jeżeli w toku rozwiązywania jakiegoś zagadnienia:

– posługuje się przede wszystkim wyobraźnią, tj. obrazami pojęć, które rozważa, niezależnie od ich formalnych definicji i
– przeprowadza skrótowe rozumowania oparte na oczywistych dlań przesłankach niezależnie od ich wywiedlności w ramach danego układu albo
– formułuje hipotezę matematyczną opartą na dostrzeżonych analogiach, odpowiedniościach, odwzorowaniach lub
– uzasadnia swe wnioski nie zanalizowaną dokładniej rekurencją.

Wreszcie rozumowanie ucznia uznamy za **formalne**, jeżeli:

– zdaje on sobie sprawę z przyjętej podstawy dedukcji i
– świadomie w toku rozwiązywania zagadnienia stara się każdy z kolejnych wniosków możliwie precyzyjnie wywieść z uznanych już poprzednio w danym układzie twierdzeń i definicji;
– korzysta prawidłowo z definicji, a więc używa terminu definiowanego tylko w sensie nadanym mu przez tę definicję, oraz rozumie, że nowy termin może wprowa-

dzić do swych rozważań po wyjaśnieniu jego znaczenia tylko za pomocą terminów poprzednio już wprowadzonych i
– korzysta prawidłowo z twierdzeń, to jest odrywa tezę dopiero po dokładnym skontrolowaniu, czy w danym przypadku są spełnione założenia (Krygowska, 1977, s. 144–145).

Oczywiście rzadko bywa tak, że rozumowanie matematyczne jest w pełni czystym, tylko jednym sposobem myślenia spośród trzech wyżej wymienionych. Nawet proces myślenia matematyka-naukowca nie jest pozbawiony intuicji, czy też prób empirycznych, mimo iż ostatecznie ukazany jest w czystej formalnej postaci. Przyjąć zatem należy, że myślenie matematyczne ucznia zazwyczaj bywa splotem wszystkich wyżej wymienionych typów rozumowań.

W procesie rozwiązywania zadań matematycznych typu problem ogromny wpływ na odnalezienie pomysłu na jego rozwiązanie, a potem na zastosowanie odpowiedniego typu rozumowania ma narzędzie użyte w procesie pracy nad zadaniem. Jednym z takich narzędzi może być kalkulator graficzny, czy też program komputerowy, przy pomocy którego możemy między innymi zwizualizować problem, wykonać wiele poprawnych prób w bardzo krótkim czasie, czy też w ostateczności sprawdzić poprawność wykonanego zadania, uświadamiając sobie konieczność wyboru jednak innej drogi pracy (Juskowiak, 2004; Juskowiak, 2010).

Z dotychczas przeprowadzonych badań wynika, że wykorzystanie kalkulatorów graficznych oraz innych narzędzi IT może poprawić rozumienie pojęć matematycznych, szczególnie pojęcia funkcji (Dunham, 2000; Demana, Waits, 1992). Uczniowie korzystający na przykład z kalkulatora plasują się na wyższym poziomie rozumienia graficznych przedstawień danych, potrafią lepiej łączyć wykresy z równaniami, potrafią lepiej interpretować i odczytywać informacje graficzne. W wyniku badania większej liczby reprezentantów dysponują szerszą bazą przykładów funkcji, lepiej rozumieją związki pomiędzy reprezentacjami graficzną, algebraiczną i numeryczną. Kalkulatory graficzne i programy komputerowe pomagają ponadto w rozszerzaniu pojęcia i znaczenia liczb oraz w umacnianiu rozumienia operacji arytmetycznych (Dunham, 2000; Griffith, 2000; Demana, Waits, 1992).

Jakie efekty przynosi zastosowanie narzędzi IT podczas rozwiązywania zadań? H. Kąkol w jednym ze swoich artykułów pisze: „Kalkulator pozwala odkryć inne aspekty zadania, zobaczyć cały szereg innych problemów matematycznych, które przy tradycyjnym rozwiązywaniu umykają naszej uwadze, a często są w ogóle niemożliwe do zauważenia. Stawiają rozwiązującego w innej roli. Nie jest on już tylko wykonawcą określonego polecenia, ale staje się odkrywcą swojej własnej matematyki" (Kąkol, 1996, s. 152). Badania pokazują, że wykorzystanie kalkulatora może prowadzić do poprawy umiejętności rozwiązywania problemów matematycznych. Uczniowie wówczas mniej muszą się koncentrować na przypominaniu sobie wzorów i schematów obliczeniowych, a więcej na właściwym procesie rozwiązywania problemu (Dunham, 2000; Kutzler, 2000; Demana, Waits, 1992). Zauważono ponadto, że uczniowie pracując z kalkulatorem mają bardziej elastyczne podejście do rozwiązywania problemów, bardziej angażują się w rozwiązywanie zadań i później się poddają w przypadku niepowodzenia. Roz-

wiązują nietypowe zadania, których nie da się rozwiązać za pomocą metod algebraicznych (Dunham, 2000; Demana, Waits, 1992; Demana, Waits, 2000).

Dość dużą rolę mogą spełniać kalkulatory i programy komputerowe w wyrabianiu u uczniów umiejętności przeprowadzania rozumowań matematycznych, a szczególnie wcześniej już scharakteryzowanego rozumowania empirycznego. Kalkulator umożliwia szybkie i dokładne wykonanie wielu prób matematycznych, a uczniowi pozostawia zaobserwowanie pewnych prawidłowości i sformułowanie hipotezy matematycznej (Kąkol, 1987). Z przeprowadzonych przez dydaktyków obserwacji wynika, że zastosowanie kalkulatorów graficznych usprawnia i udoskonala rozumowanie matematyczne, wpaja uczniom umiejętność racjonalnego wnioskowania (Demana, Waits, 1992).

Istotną i najczęściej docenianą przez nauczycieli funkcją narzędzi IT jest graficzna ilustracja danych algebraicznych i numerycznych, czyli wizualizacja. Kalkulatory graficzne i programy komputerowe pomagają uczniom w wizualizacji problemów, usprawniają lepsze i szybsze sporządzanie wykresów, z których można uczyć się matematyki. Wykresy generowane za pomocą nowej techniki mogą posłużyć do nauczania ważnych zagadnień matematycznych. Jeszcze do niedawna możliwość rysowania wykresów bardziej złożonych funkcji pojawiała się po rachunku różniczkowym. Teraz można bez wprowadzania tak zaawansowanej teorii obejrzeć wykresy takich funkcji (Legutko, 1990; Demana, Waits, 1992).

Praca z uczniem zdolnym oraz z uczniem osiągającym słabe wyniki z matematyki jest ostatnio tematem wielu eksperymentów i rozważań. Być może kalkulator pozwoli rozwiązać wiele problemów z tym związanych. B. Kutzler zauważa możliwość budowania z pomocą kalkulatora tzw. „rusztowania" (*scaffolding*) nad niekompletnym piętrem wiedzy. Kompensuje ono brak bardziej podstawowych wiadomości i pozwala na uniknięcie błędów. Kalkulator umożliwia wprowadzenie do nauczania daleko idących ułatwień poprzez trywializację pewnych czynności, eksperymentowanie, wizualizację i koncentrację uwagi na problemie zadania (Kutzler, 2000). Tę rolę podkreśla także D. Fielker, autor kontrowersyjnego artykułu, jaki ukazał się na łamach „Timesa" w 1990 roku. Pisze on, że wielu uczniom, którzy nigdy nie opanują do końca pisemnego dzielenia, kalkulator daje szansę posługiwania się arytmetyką (Fielker, 1993). Badania pokazują, że w wyniku zastosowania kalkulatorów graficznych uczniowie tradycyjnie uważani za mniej zdolnych mogą osiągnąć dobre wyniki, a czasami nawet lepsze od reszty klasy. Wykorzystywanie kalkulatorów jest korzystne dla uczniów mających problemy z wyobraźnią przestrzenną, uczniów z klas specjalnych o obniżonych wymaganiach oraz dla tych, którym brak pewności siebie (Dunham, 2000; Demana, Waits, 1992).

Od wielu lat podejmowane są próby zmierzające do podniesienia poziomu nauczania. Wiążą się one przede wszystkim ze zmianą stylu nauczania, z zastępowaniem metod podających metodami problemowymi (Kąkol, 1991). Okazuje się, że odpowiednio wykorzystywane komputery i kalkulatory mogą przyczynić się do rozwoju problemowego nauczania matematyki. Narzędzia te są bowiem źródłem wielu sytuacji problemowych, umożliwiają formułowanie nowych zadań tego typu, a także ich weryfikowanie. W kalkulatorach dostrzega się środowisko spontanicznego uczenia się, tak

bardzo popieranego przez S. Paperta (Pisarski, Pisarski, 1999). Kalkulator stwarza uczniowi możliwości uczenia się poprzez osobiste zaangażowanie. Stwarza możliwości samodzielnego konstruowania narzędzi i problemów oraz eksperymentowania przez popełnianie i poprawianie własnych błędów. Do tego jest bardzo poręczny, co ułatwia korzystanie z niego w wielu miejscach, także poza szkołą.

Autorzy licznych publikacji podejmują temat momentu i celu wykorzystania technologii informacyjnej na lekcji matematyki. Zauważa się, że kalkulator nadal bardzo często jest narzędziem, które służy przede wszystkim do pokazywania różnych aspektów pojęć matematycznych, a zatem zastępuje tablicę i kredę (Pisarski, Pisarski, 1999). Podkreśla się konieczność wykorzystania kalkulatorów w tych momentach, w których nauczyciel spotyka różnorodne trudności – często niemożliwe do przezwyciężenia przy użyciu tradycyjnych metod nauczania i stosowanych do tej pory środkach dydaktycznych (Dałek, i in., 1993; Kąkol, 2002). Komputer i kalkulator powinny być stosowane tam, gdzie są rzeczywiście użyteczne, kiedy bez nich nie można w warunkach szkolnych efektywnie rozwiązać postawionego zadania albo gdzie ich zastosowanie otwiera nowe możliwości nauczania matematyki.

Równolegle spotkać można też jednak opinie, że nadużywanie kalkulatorów i programów komputerowych może zniszczyć twórcze podejście ucznia do matematyki, może przeszkadzać w subiektywnym odkrywaniu matematyki, a nawet doprowadzić do intelektualnego lenistwa (Filip, Rams, 2000; Juskowiak, 2008).

W wielu publikacjach podkreśla się, że kształtowanie umiejętności „kartki i ołówka" powinno być nadal ważną częścią procesu uczenia się i nauczania matematyki. Autorzy tych prac dodają, że rola tak wykonywanych obliczeń i tak ulegnie zmianie z racji powszechnie dostępnych narzędzi obliczeniowych. Nauczyciele i dydaktycy wyszczególniają trzy drogi pracy z kalkulatorem oraz programem komputerowym:

- wykonanie rachunków na kartce i poparcie uzyskanych efektów pracy przy użyciu kalkulatora;
- wykonanie przedstawień graficznych danych i wzmocnienie ich rezultatami rachunków wykonanych na kartce;
- wykorzystanie tylko IT, kiedy jest ona jedynym środkiem pozwalającym uzyskać rozwiązanie.

Dodają, że konieczna jest nieustająca mądrość nauczyciela polegająca na racjonalnym korzystaniu z kalkulatora oraz świadomość celu, jakiemu służyć ma wykorzystywany środek dydaktyczny.

Teorie i zagadnienia wyżej opisane zostały wykorzystane między innymi jako podbudowa teoretyczna oraz element motywacji do podjęcia próby obserwacji pracy studentów – przyszłych nauczycieli matematyki – z wykorzystaniem nowych technologii w nietypowych zadaniach matematycznych, celem zdiagnozowania ich umiejętności i przygotowania do pracy z uczniem w zakresie rozwiązywania zadań nietypowych oraz zadań typu problem.

Opisane badania są badaniami diagnostycznymi[2], związanymi głównie z rejestrowaniem, analizą i oceną badanych sytuacji procesu uczenia się i nauczania matematyki. Celem badań było rozpoznanie i opisanie sposobów rozwiązywania pewnej grupy zadań matematycznych z wykorzystaniem narzędzi IT oraz metodą klasyczną przez studentów – przyszłych nauczycieli matematyki.

W szczególności poszukiwano odpowiedzi na pytania:

– jaki rodzaj rozumownia matematycznego prowokuje narzędzie użyte przez studenta w toku rozwiązywania zadania?
– czy w obu sposobach pracy studenta nad tym samym zadaniem użyty został ten sam rozdaj rozumowania?
– jaka jest rola zastosowanego narzędzia w poszukiwaniu pomysłu na rozwiązanie zadania?

W badaniach zastosowano następujące metody i techniki badawcze[3]:

– obserwacja bezpośrednia,
– wywiad oraz
– ilościowa i jakościowa analiza dokumentów, które stanowiły karty pracy oraz rejestracje pracy z narzędziem IT nad zadaniem.

Czas zbierania materiału badawczego liczył trzy lata. Poniżej scharakteryzowana zostanie organizacja oraz przebieg badań.

Pierwszy rok badań:

W pierwszym roku trwania badań udział wzięły 4 studentki czwartego roku matematyki specjalności nauczycielskiej.

Podczas każdego ze spotkań studentki rozwiązywały to samo zadanie matematyczne najpierw z wykorzystaniem emulatora kalkulatora graficznego, a następnie metodą klasyczną.

Spotkania odbywały się raz w tygodniu przez okres jednego semestru.

Udział w badaniach poprzedzony został kilkutygodniowym wdrożeniem studentek w obsługę kalkulatora graficznego marki Casio fx-9860G Slim.

Wszystkie studentki posiadały średnią z wszystkich przedmiotów powyżej 4.0, z przedmiotów dydaktycznych powyżej 4.5.

Studentki miały nieograniczony czas na wykonanie zadania, jednak oba podejścia musiały być wykonane ciągiem – raz za razem.

Drugi i trzeci rok badań:

W kolejnych dwóch latach udział brało odpowiednio 5 (1 mężczyzna) oraz 8 (1 mężczyzna) studentów pierwszego roku studiów uzupełniających, kierunek matematyka, specjalność nauczycielska.

Podczas każdego ze spotkań studenci rozwiązywali to samo zadanie matematyczne najpierw metodą klasyczną, a gdy mieli problemy z poradzeniem sobie z zadaniem,

[2] Opis tego rodzaju badań zamieszcza W. Nowak (Nowak, 1982).
[3] Za M. Łobocki (Łobocki, 2004).

mogli uruchomić dowolne dostępne narzędzi IT, tj. emulator kalkulatora graficznego lub programy GeoGebra czy WinPlot. Jeżeli student poradził sobie (wg jego opinii) z zadaniem metodą klasyczną, poproszony został o ponowne jego rozwiązanie z wykorzystaniem IT.

Spotkania odbywały się raz w tygodniu przez okres jednego semestru.

Udział w badaniach poprzedzony został kilkutygodniowym wdrożeniem studentów w obsługę kalkulatora graficznego marki Casio fx-9860G Slim; pozostałe narzędzia były studentom znane, wprowadzone były na zajęciach z technologii informacyjnych prowadzonych na studiach.

Trudno mówić o średniej z przedmiotów, ponieważ badania odbywały się w pierwszym semestrze pierwszego roku studiów uzupełniających, o oceny z dyplomu licencjackiego nie zostali zapytani.

Studenci mieli nieograniczony czas na wykonanie zadania, jednak oba podejścia musiały być wykonane raz za razem.

ZADANIA

Do badań przygotowano 8 zadań matematycznych. Były to zadania:
– nietypowe[4] albo
– zadania typu problem[5].

Zadania zostały tak dobrane, by każde z nich można było rozwiązać z wykorzystaniem narzędzi IT.

Zaproponowana grupa zadań została wybrana na podstawie wcześniejszych kilkusemestralnych obserwacji samodzielnej pracy studentów kierunku nauczycielskiego nad ich rozwiązaniem. Przez zdecydowaną większość rozwiązujących zadania wybrane do badań były klasyfikowane jako nietypowe bądź zadania typu problem.

W pierwszym roku trwania badań studenci najpierw podchodzili do pracy z narzędziem IT, a potem bez niego, w ten sposób chciano sprawdzić, czy i jaki wpływ na postępowanie klasyczne będzie miało użycie wybranego narzędzia.

W efekcie wstępnie postawionych wniosków po pierwszym roku trwania badań organizacja pracy nad zadaniem została zmieniona.

Analizie poddano:
– karty pracy z rozwiązaniami zadań;
– karty z odpowiedziami na pytania dotyczące przebiegu pracy z oraz bez kalkulatora;
– wnioski obserwatora, który towarzyszył grupie osób rozwiązujących zadanie;
– nagrania z pracy z wykorzystanieniem IT, filmy z emulatora oraz filmy z programu Camptasia, czy też dynamiczne prezezntacje z programu GeoGebra.

[4] Niepodobne do żadnych spośród dotychczas rozwiązywanych (Schoenfeld, 1980).
[5] Zdefiniowane w części teoretycznej tego artykułu.

ANALIZA I OPIS PRACY NAD ZADANIEM

Jak już wcześniej wspomniano, studenci przystępowali do rozwiązania 8 różnych zadań, każde z nich było dla studentów albo zadaniem typu problem, albo zadaniem nietypowym. Ze względu na rodzaj dominujących treści matematycznych wybrano zadania tak sformułowane, by prowokować albo użycie narzędzi algebry, albo narzędzi IT, w szczególności ich graficznych możliwości, przy czym bardzo szybko okazywało się, że owe dostępne respondentom metody nie przynoszą zamierzonego efektu, czyli nie pozwalają im szybko dojść do rozwiązania zadania.

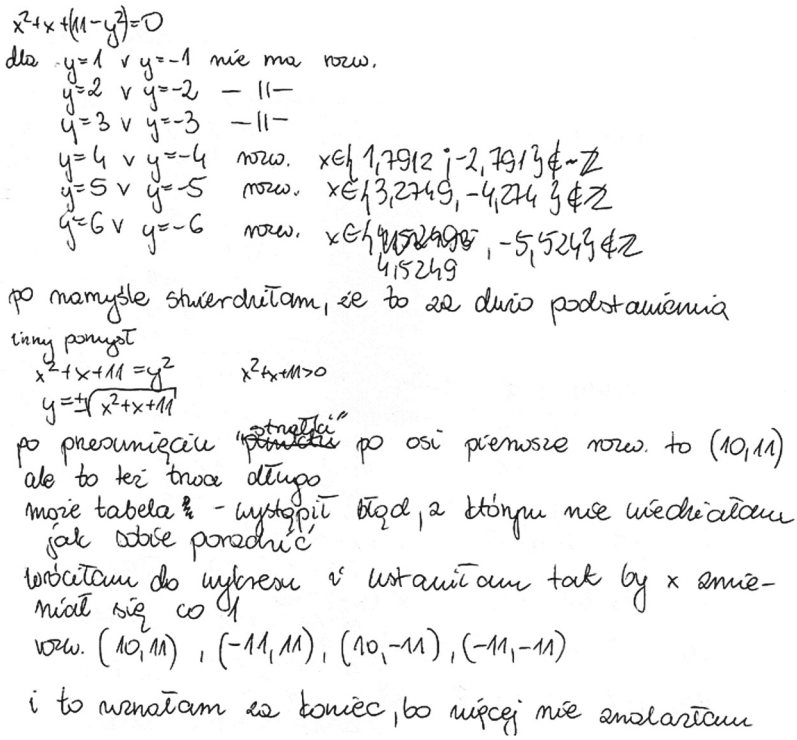
W niniejszym artykule analizie zostanie poddany przebieg pracy dwóch studentów – jednego z pierwszego trybu pracy, tzn. najpierw z wykorzystaniem narzędzi IT a potem metodą klasyczną, i jednego z trybu pracy polegającego najpierw na podjęciu próby rozwiązania zadania metodą klasyczną i później z IT – nad następującym zadaniem:

Zadanie

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie.

$$x^2 + x + 11 = y^2$$

PODEJŚCIE OD IT DO METODY KLASYCZNEJ



Rysunek 1. Student 1 (rozwiązanie z kalkulatorem)

Studentka wykorzystuje kalkulator, by dokonać sprawdzenia wartości wyrażenia dla kolejnych całkowitych wartości zmiennej y. Po wykonaniu 6 prób zarzuca ten sposób, uznając go za czasochłonny (przypomnijmy, że obliczenia wykonuje z użyciem kalkulatora). Kolejny pomysł to narysowanie za pomocą kalkulatora wykresów funkcji:

$$y = \sqrt{x^2 + x + 11} \text{ oraz } y = \sqrt{x^2 + x + 11}$$

Uruchamia opcję śledzenia wartości współrzędnych punktów należących do wykresu, zarzucając po chwili i ten pomysł, znowu uznając go za zbyt czasochłonny. Podejmuje próbę śledzenia wartości współrzędnych punktów w tabeli, ale nie potrafi sobie poradzić z realizacją tego pomysłu. Po chwili namysłu powraca do wykresu, dokonuje zmian w ustawieniach skoku wartości argumentu podczas opcji śledzenia współrzędnych punktów wykresu. W tym momencie studentka odnajduje wszystkie 4 rozwiązania.

INTERPRETACJA WYNIKÓW

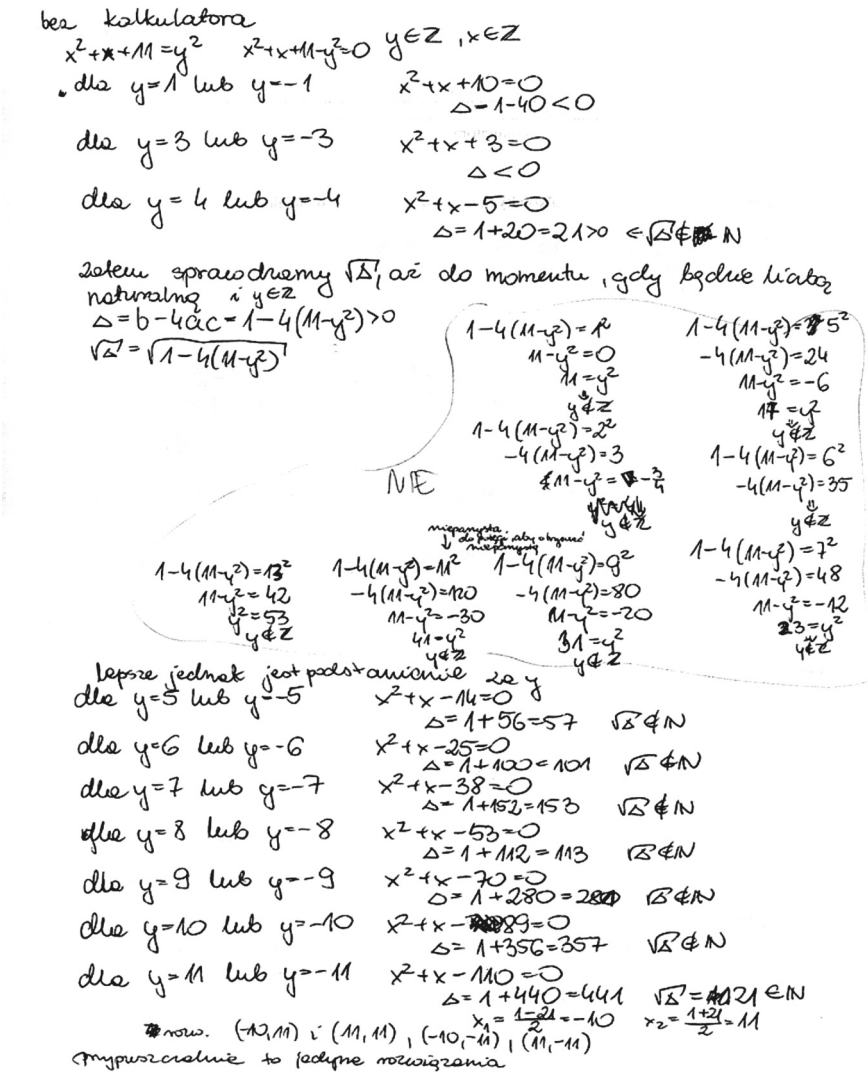
Studentka po przeczytaniu treści zadania nie miała racjonalnego i gotowego pomysłu na jego rozwiązanie z wykorzystaniem kalkulatora. Przypominając sobie kilka funkcji tego narzędzia podejmuje cztery próby wykorzystania obliczania wartości wyrażenia, szukania wartości współrzędnych punktów na wykresie oraz w tabeli. Po kilku próbach doświadczenia w matematycznej przestrzeni „udaje się" jej odnaleźć poprawne rozwiązanie. Brak tu jednak refleksji nad tym, czy są to jedyne rozwiązania, brak komentarza dydaktycznego pokazującego konieczność użycia formalnego rozumowania matematycznego celem potwierdzenia znalezionych par liczb spełniających warunki zadania.

Studentka kontynuując pracę nad zadaniem bez użycia kalkulatora, taki był wymóg badań, ponownie zaczyna swoją pracę od obliczania wartości wyrażenia dla kolejnych całkowitych wartości y, o dziwo takich samych jak przed chwilą. Podejmuje się trudu rachunku, mimo iż przed chwilą przyznała, że dla nich nie znajdzie poprawnych rozwiązań. Są to bardzo żmudne rachunki, których jednak nie zaprzestaje, gdyż z pracy z kalkulatorem pamięta, iż dla $y = 11$ i $y = -11$ odnajdzie pierwsze dwie poprawne pary rozwiązań. Pracę swoją kończy na tym właśnie kroku.

INTERPRETACJA WYNIKÓW

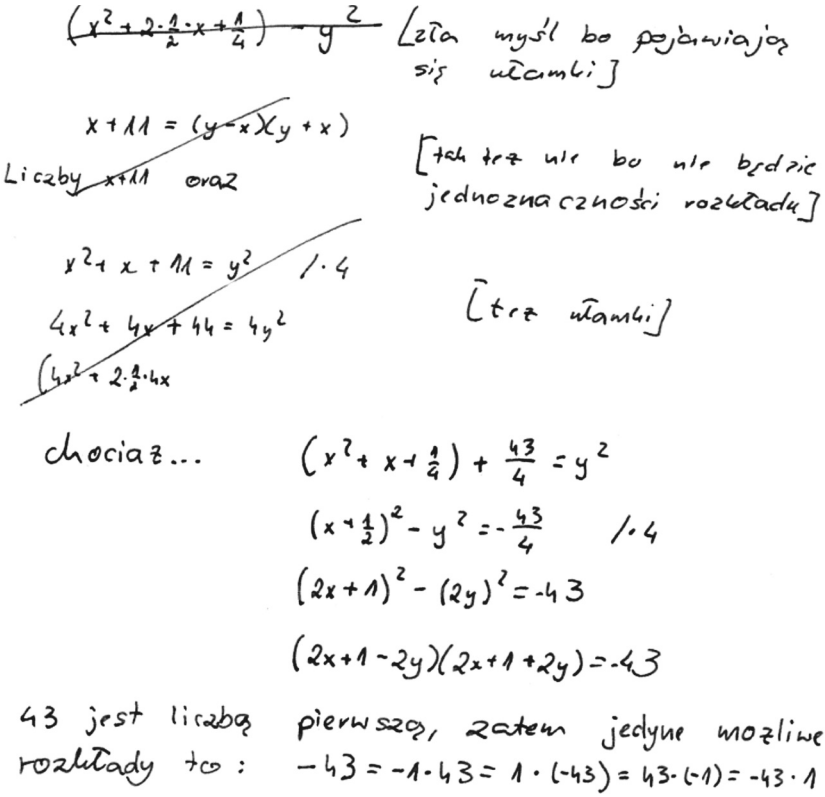
Studentka ponownie podjęła się pracy z wykorzystaniem prób w matematycznej przestrzeni, przeliczając wartości wyrażania tak długo, aż znalazła cztery pary liczb spełniających równanie.

Oczywiście są to wszystkie rozwiązania, ale niestety i w tym przypadku studentka nie podjęła się pokazania, że nie ma więcej rozwiązań. Studentka nie czuła potrzeby sformalizowania swojej drogi postępowania, bo gdyby miała świadomość stosowania w poprawny sposób matematycznej metody, a nie wiedziałaby jak to zrobić, z pewnością umieściłaby stosowny komentarz pod swoim rozwiązaniem.



Rysunek 2. Student 1 (rozwiązanie bez kalkulatora)

Studentka rozumowała empirycznie w obu przypadkach, wykorzystując kalkulator i znając potencjalnie poprawne rozwiązanie wzorowała się na pierwszej metodzie użytej w podejściu do zadania z użyciem kalkulatora graficznego. Pomysł w pierwszym podejściu związany był ze znajomością różnych funkcji kalkulatora graficznego oraz sposobami ich wykorzystania podczas graficznego rozwiązywania równań stopnia pierwszego z jedną niewiadomą. Pomysł w drugim podejściu został zaczerpnięty z pracy z kalkulatorem. Zdecydowanie narzędzie przyczyniło się do znalezienia rozwiązania, gdyby studentka znała formalną drogę rozwiązania równania, z pewnością użyłaby jej.

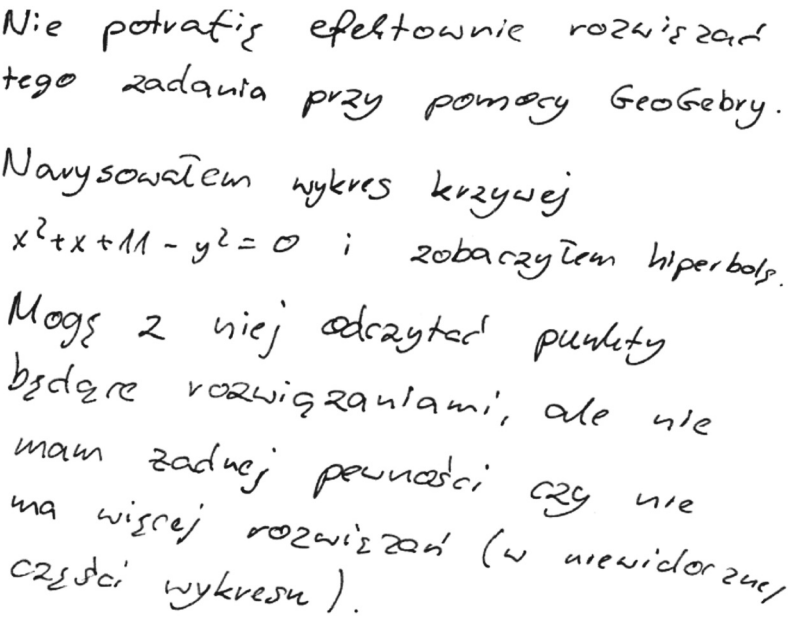


Rysunek 3. Student 2 (rozwiązanie bez narzędzi IT)

Student trzykrotnie podejmuję próbę formalnego, algebraicznego rozwiązania zadania, stosuje heurystyki znane z rozwiązywania zadań typu problem, trzecie podejście jest właściwe, chociaż w pierwszym kroku student tego nie widzi. W dalszym postępowaniu, które nie zostało tu zaprezentowane ze względu na ograniczą liczbę stron publikacji, student kontynuuje formalne rozumowanie, obliczając poprawnie współrzędne wszystkich punktów spełniających warunki zadania. Na końcu sprawdza poprawność wykonanych rachunków.

INTERPRETACJA WYNIKÓW

Student po kilku intuicyjnych próbach poszukiwania pomysłu na rozwiązanie zadania zastosował rozumowanie formalne. Pomysł na rozwiązanie był efektem wielu doświadczeń w rozwiązywaniu zadań typu problem, podobnych typów. Student uznał, że zadanie to jest właśnie zadaniem typu problem, niełatwym, ale tylko do czasu odnalezienia pomysłu.


Nie potrafię efektownie rozwiązać tego zadania przy pomocy GeoGebry. Narysowałem wykres krzywej $x^2+x+11-y^2=0$ i zobaczyłem hiperbolę. Mogę z niej odczytać punkty będące rozwiązaniami, ale nie mam żadnej pewności czy nie ma więcej rozwiązań (w niewidocznej części wykresu).

Rysunek 4. Student 2 (rozwiązanie z Geogebrą)

Powyższy komentarz studenta najlepiej oddaje jego brak pomysłu na formalne wykorzystanie tego narzędzia w procesie rozwiązania zadania. Owszem, student wykorzystał graficzne możliwości programu Geogebra, narysował wykres funkcji, po poprawnym jej przekształceniu. Potrafi odnaleźć rozwiązania zadania z wykorzystaniem opcji śledzenia współrzędnych punktów wykresu, ale widzi, że to narzędzie w taki sposób wykorzystane nie daje gwarancji na udzielenie odpowiedzi na pytanie o wszystkie możliwe rozwiązania.

INTERPRETACJA WYNIKÓW

Student w pracy bez narzędzi IT odnalazł pełne i poprawne rozwiązanie zadania, nie musiał uciekać się do poszukiwania pomysłu z wykorzystaniem IT.

W pracy z programem komputerowym korzystał on z zupełnie innego pomysłu na rozwiązanie zadania. Student miał świadomość funkcji, jakie posiada to narzędzie, dlatego postanowił wykorzystać jego graficzne możliwości. To także jedna z heurystyk – zwizualizuj treść zadania. Student po ponad godzinnej pracy dochodzi do wniosku, że poza intuicyjnym rozwiązaniem nie może zrobić nic więcej, a to go nie zadawala. Uznał, że z komputerem nie potrafi rozwiązać zadania, ale w przeciwieństwie do narzędzi algebry Geogebra wymusza na rozwiązujących postawienie pytania o liczbę rozwiązań i uzasadnienie postawionej odpowiedzi. Przywołując opisaną powyżej pracę studentki widzimy, że wniosek postawiony przez studenta nie jest oczywisty dla każdego przyszłego nauczyciela matematyki.

PODSUMOWANIE

Mimo iż szczegółowej analizie poddano na razie dwa spośród ośmiu zadań rozwiązywanych przez studentów w czasie trzyletnich obserwacji, a w artykule opisano fragment wyników jednego z nich, to już można podjąć próbę sformułowania wstępnych wniosków o sposobach pracy (rozumianych jako przykłady rozwiązań) przyszłych nauczycieli matematyki z zadaniami nietypowymi oraz z zadaniami typu problem na drodze pracy z wykorzystaniem narzędzi nowych technologii oraz metodą klasyczną, tzw. metodą „kartki i ołówka". Pamiętać należy jednak, że każde z zadań użytych do badań wymagało innych umiejętności oraz innej wiedzy. Sposób podejścia do zadania uzależniony był zatem zawsze od indywidualnego bagażu doświadczeń merytorycznych rozwiązującego. Czym innym jest znajomość zabiegów heurystycznych pomagających odnaleźć pomysł na rozwiązanie zadania, które to są zawsze uniwersalne.

Analiza pracy studentów nad zadaniem opisanym w artykule pozwala sformułować następujące wnioski.

Rozwiązania bez kalkulatora były klasycznymi rozwiązaniami, mimo iż pierwsze podejście było z wykorzystaniem kalkulatora, tj. z wykorzystaniem algebraicznej metody pracy i technik charakterystycznych dla rozwiązywania równań, na drodze:

1) ustalenia jednej ze zmiennych stałą,
2) znalezienie wzoru ogólnego,
3) poszukiwania rozwiązania poprzez podstawianie konkretnych wartości liczbowych do wzoru.

Większość studentek nie uzyskała na tej drodze pełnego rozwiązania zadania; jedna nie potrafiła rozwiązać zadania metodą klasyczną. Stosowały wnioskowanie empiryczne oraz rozumowanie intuicyjne. Praca z kalkulatorem polegała na próbie wykorzystania jednej z dyrektyw heurystycznych – „sporządź wykres". Śledzenie przy użyciu opcji „trace" wartości funkcji dla zadanego argumentu doprowadziło większość studentek do uzyskania częściowo poprawnego rozwiązania zadania. Żadna ze studentek nie była pewna swego rozwiązania i nie dociekała liczby wszystkich rozwiązań zadania. Zdecydowanie fakt, że najpierw podjęto pracę z wykorzystaniem narzędzi IT, nie wpłynął na znalezienie pomysłu, dzięki któremu studentki mogłyby uruchomić formalną drogę pracy. Brak fazy refleksji w procesie rozwiązywania zadań typu problem.

Studenci biorący udział w dwóch kolejnych latach obserwacji pracowali najpierw bez kalkulatora czy programu komputerowego, a później włączali do pracy te narzędzia. Zdecydowana większość studentów w pracy bez IT podejmowała się rozwiązywania zadania na drodze wnioskowania empirycznego, podstawiając konkretne wartości liczbowe do równania, czy też podejmując próbę odczytania rozwiązania z wykresu na drodze kolejnych przybliżeń. Najczęściej rozumowali intuicyjnie, dochodząc do rozwiązania częściowo poprawnego, a czasami podejmowali formalną drogę pracy, dochodząc do pełnego i poprawnego rozwiązania, takich przypadków było jednak najmniej. Pomysłu szukali wśród znanych dotychczas metod pracy z równaniem. O dziwo, mając problemy z uzyskaniem rozwiązania metodą klasyczną, nie podejmowali próby użycia kalkulatora czy programu komputerowego do odkrycia pomysłu na rozwiąza-

nie zadania. Bardzo często studenci nie potrafili w ogóle efektywnie wykorzystać narzędzi IT, nie wiedzieli, w jaki sposób użyć dobrze znanych im funkcji i możliwości narzędzia.

Brak jeszcze przekonania wśród studentów do efektywności pracy z wykorzystaniem narzędzi IT, brak umiejętności strategicznego posługiwania się narzędziami IT, mimo iż studenci posiadają wiedzę o ich możliwościach. Brak jeszcze świadomości, że narzędzia IT mogą pomóc w odnalezieniu pomysłu na rozwiązanie trudnego zadania. Istnieje zatem potrzeba wdrożenia tych narzędzi (programy komputerowe, kalkulatory graficzne) na poziomie studiów w ramach zajęć dotyczących metod rozwiązywania zadań i nauki ich strategicznego wykorzystania. Podobnie z umiejętnością rozwiązywania zadań nietypowych oraz zadań typu problem metodą klasyczną. Okazuje się, że wiedza o efektywnych sposobach rozwiązywania tego typu zadań czy też znajomość listy zabiegów heurystycznych nie wystarczą do tego, by umieć ich użyć w celu odnalezienia pomysłu na rozwiązanie zadania.

BIBLIOGRAFIA

Czajkowska, M., Orzechowska, M. (2013). Nauczyciele matematyki. W: *Raport o stanie edukacji 2013. Liczą się nauczyciele.* Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.

Dałek, K., Dąbrowska, M., Zamek-Gliszczyński, T., Mostowski, K., Zawadowski, W. (1993). Przekonania i przeświadczenia w sprawie kalkulatorów. *NiM*, *8*, 11.

Demana, F.D., Waits, B.K. (1992). A computer for all students (graphing calculators). *Mathematics Teacher*, *85*(2), 94–95.

Dunham, P.H. (2000), *Hand-held Calculators in Mathematics Education: A Research Perspective*. W: E.D. Laughbaum (red.), *Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers* (s. 39–47). Columbus, OH: The Ohio State University.

Fielker, D. (1993). Wariactwo pisemnego dzielenia. *Nauczyciele i Matematyka*, *8*, 10.

Filip, J., Rams, T. (2000). *Dziecko w świecie matematyki.* Kraków: Oficyna Wydawnicza Impuls.

Griffith, L. (2000). *Impact of Technology on Pedagogy, Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education:* W: E.D. Laughbaum (red.), *Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers* (s. 76–77). Columbus, OH: The Ohio State University.

Juskowiak, E. (2004). Analiza pracy uczniów z kalkulatorem graficznym podczas rozwiązywania zadań (fragment badań). W: *Dydaktyka Matematyki*, *Seria V*(26) (s. 95–118). Kraków: Polskie Towarzystwo Matematyczne.

Juskowiak, E. (2008). O zagrożeniach wynikających z pracy z kalkulatorem graficznym. W: *Prace monograficzne z dydaktyki matematyki. Współczesne Problemy Nauczania Matematyki* (s. 51–62, tom 1). Bielsko-Biała: Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki.

Juskowiak, E. (2010). Graphic calculator as a tool for provoking students creative mathematical activity. W: B. Maj, E. Swoboda, K. Tatsis (red.), *Motivation via Natural*

Differentiation in Mathematics (s. 268–280). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
Kąkol, H. (1987). Rozumowanie matematyczne a komputer. *Matematyka*, *2*, 145–148.
Kąkol, H. (1996). Kalkulator graficzny pomaga rozwiązać. *Matematyka*, *3*, 152–154.
Kąkol, H. (2002). Zintegrowane nauczanie matematyki z elementami informatyki w gimnazjum. *Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej*, *9*, 141–147.
Krygowska, Z. (1977). *Zarys dydaktyki matematyki*. tom 3. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
Kutzler, B. (2000). The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics. W: E.D. Laughbaum (red.), *Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers* (s. 5–24). Columbus, OH: The Ohio State University.
Łobocki, M. (2004). *Metody i techniki badań pedagogicznych*, Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls".
Legutko, M. (1990). Nauczyciel, reforma nauczania matematyki i mikrokomputer, *Matematyka Społeczeństwo Nauczanie*, *1*, 22–29.
Majewska-Opiełka, I. (2012). *Co to jest podświadomość?* Pobrano 2 października, 2017, z http://www.majewska-opielka.pl/co-to-jest-podswiadomosc/
Nowak, W. (1982). Wybrane zagadnienia metodologii badań dydaktyki matematyki. *Dydaktyka Matematyki*, *1*, 61–126.
Papert, S. (1996). *Burze mózgów. Dzieci i komputery*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
Pisarski, M., Pisarski, P. (1999). Środowisko TI-83. *NiM 31/32*, 21–26.
Polya, G. (1964). *Jak to rozwiązać?* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
Schoenfeld, A.H. (1980). Jak nauczać twórczego rozwiązywania zadań. W: A. Góralski (red.), *Zadanie, metoda, rozwiązanie* (s. 11–55). Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
Semadeni, Z., Gruszczyk-Kolczyńska, E., Treliński, G., Bugajska-Jaszczołt, B., Czajkowska, M. (2015). *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*. Kielce: Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP Spółka z. o.o.
Waerden, B.L. (1966). Pomysł i rozumowanie w matematyce. *Wiadomości Matematyczne IX. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 9*, 54–82.

IDEA AND REASONING IN THE PROCESS OF ATYPICAL SOLVING: CLASSICAL METHOD (PAPER AND PENCIL METHOD) AND IT METHOD

ABSTRACT: This paper describes a study to examine and describe efforts to solve a group of mathematical tasks using IT tools and the classical method by future math teachers. It describes two students' work on one task. The collection period of the research material was three years. During that time, 17 students (after several consecutive years of research) taught in the Faculty of Mathematics and Computer Science at UAM in Poznan, Poland, tried to solve eight different tasks in two ways: using IT tools and without

them. The study tries to answer the following questions: Can future math teachers use IT tools to solve difficult tasks, or do these tools help them find an idea to solve a task? Do the students work to solve tasks in the same way using IT and the classical method? Are they ready to organize the process of learning and teaching aimed at discovering mathematics by solving atypical tasks?

KEYWORDS: typology of mathematical tasks, atypical tasks, mathematical problems, reasoning, idea of task solution, new technologies in mathematics lessons