Alina Kalinowska
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
Katedra Wczesnej Edukacji

Matematyczne kompetencje przyszłych nauczycieli wczesnej edukacji jako potencjalne źródło realizowanej przez nich metodyki. Perspektywa konstruktywistyczna

ABSTRAKT: Matematyczna wiedza dydaktyczna nauczyciela wczesnej edukacji potocznie postrzegana jest jako zestaw instruktażowych metod przekazywania uczniom podstawowych pojęć. Studenci wczesnej edukacji dysponują osobistymi doświadczeniami szkolnymi oraz skonstruowanymi na tej podstawie matematycznymi przekonaniami. Umiejętność (lub jej brak) rozwiązywania zadań matematycznych z poziomu klas początkowych przez przyszłych nauczycieli również odsłania określone ich rozumienie, czym jest wiedza matematyczna oraz jej rozwijanie w szkole. Wyniki badań studentów wczesnej edukacji ukazują ich niedostateczne kompetencje w zakresie rozwiązywania zadań nietypowych. Może to generować w przyszłości trudności w uruchamianiu konstruktywistycznych kompetencji dydaktycznych.

SŁOWA KLUCZOWE: studenci wczesnej edukacji, wiedza matematyczna, rozumienie relacji matematycznych

Kontakt:	Alina Kalinowska alina.kalinowska@uwm.edu.pl
Jak cytować:	Kalinowska, A. (2018). Matematyczne kompetencje przyszłych nauczycieli wczesnej edukacji jako potencjalne źródło realizowanej przez nich metodyki. Perspektywa konstruktywistyczna. *Forum Oświatowe*, *30*(2), 51–66. Pobrano z http://forumoswiatowe.pl/index.php/czasopismo/article/view/579
How to cite:	Kalinowska, A. (2018). Mathematical competence of future early childhood teachers as a potential source of their methodology: a constructivist perspective. *Forum Oświatowe*, *30*(2), 51–66. Retrieved from http://forumoswiatowe.pl/index.php/czasopismo/article/view/579

WSTĘP

Każdy, kto był uczniem w szkole, zdobył również doświadczenia bycia nauczycielem, obserwując zachowania i działania kadry pedagogicznej. Dzięki temu od pierwszej klasy budował potoczne teorie związane z tą rolą społeczną. Osobiste teorie edukacyjne mogą mieć charakter uświadomionych koncepcji lub ukrytych, proceduralnych strategii postępowania w określonych szkolnych sytuacjach. Teorie tworzone przez człowieka mają pewne własności, które G.L. Murphy i D.L. Medin charakteryzują następująco, wskazując na konieczność spójności teorii z resztą wiedzy człowieka:

– wyjaśnienia tworzone przez teorię mają związek z konkretną dziedziną obserwacji,
– teorie upraszczają doświadczaną rzeczywistość,
– teorie dostosowują nowe informacje do tego, co już znane,
– teorie mają jakąś strukturę wewnętrzną,
– teorie na swój sposób „wchodzą w interakcje z danymi i obserwacjami" (Murphy, Medin, 2007, s. 323).

Mają one postać pewnych schematów poznawczych, jako prywatne i nieuświadomione teorie na temat spotykanych sytuacji, zjawisk i zdarzeń (Rumelhart, 2007, s. 435). W tym kontekście osobiste teorie nauczycieli stanowią sens ich działań, jednocześnie je uprawomocniając. Przekonania na temat istoty wiedzy matematycznej oraz rozumienie procesu jej powstawania w umyśle dziecka jest dla nauczycieli wczesnej edukacji podstawą działań podejmowanych w tej roli. Również dla studentów wczesnej edukacji stanowią klucz do rozumienia tego, co dzieje się na lekcji. Ich osobiste doświadczenia szkolne, jak zwracał uwagę S. Dylak, ukształtowały pewną wiedzę pedagogiczną, która zbudowana jest przede wszystkim na bazie pojęć naturalnych i może nie nakładać się na wiedzą zdobywaną w trakcie studiów (Dylak, 1995). Edukacyjne koncepcje potoczne studentów są bowiem głęboko wpisane w narzędzia poznawcze i słabo poddają się rekonstrukcji, jeśli nie towarzyszy temu procesowi autorefleksja.

Opisem i analizą tworzenia ogólnie rozumianych warunków uczenia się zajmuje się dydaktyka. Przedmiot jej zainteresowań poznawczych nie jest, zdaniem D. Klus-Stańskiej, tak oczywisty, jak potocznie się uważa. Dydaktyka może być definiowana jako czynności nauczyciela kierującego pracą uczniów. Autorka wskazuje jednak, że nie jest to jedyna

perspektywa rozumienia, czym jest dydaktyka. Odmienne podejścia do sposobu tworzenia się wiedzy w umyśle jednostki, wzajemnych relacji jednostki ze środowiskiem społecznym, a nawet z ekonomią, różnicują również sposoby definiowania dydaktyki (Klus-Stańska, 2018). Znaczenia nadawane wszystkim aspektom procesu nauczania/uczenia się matematyki mogą być zatem odmienne paradygmatycznie, a sposoby realizowania procesu edukacyjnego różnić się istotnie w zakresie akceptacji samodzielności poznawczej ucznia, roli nauczyciela czy proponowanych systemowo matematycznych treści nauczania.

Kompetencje dydaktyczne są rozumiane najczęściej jako te umiejętności nauczyciela, które są niezbędne do skutecznego wykonywania zawodu (Strykowski, 2005, s. 16). Typologia kompetencji nauczyciela wczesnej edukacji jest rozbudowana, uogólniana i podlega nieustannym rekonceptualizacjom. Kompetencje dydaktyczne stanowią jeden z trzech obszarów umiejętności związanych z zawodem nauczyciela. Zawierają się w grupie kompetencji określonych przez S. Dylaka jako konieczne, czyli takie, dzięki którym może on skutecznie i konstruktywnie wypełniać swoją rolę. W szczególności chodzi tu o „kompetencje interpretacyjne, autokreacyjne oraz realizacyjne" (Dylak, 1995, s. 37). Nauczyciel pełniąc funkcje dydaktyczne stosuje konkretny sposób nauczania i odpowiednie metody, które w określony sposób konstruują proces edukacyjny. Wiedza o dydaktycznych aspektach treści nauczania jest specyficzną cechą zawodową każdego nauczyciela (Arends, 1994, s. 42 i dalsze).

Tradycyjnie rozumiane kompetencje nauczyciela można opisać jako triadę cech i umiejętności**:**

- kompetencje merytoryczne, związane z treściami nauczanego przedmiotu,
- kompetencje dydaktyczno-metodyczne, związane z warsztatem pracy nauczyciela i ucznia,
- kompetencje wychowawcze, odnoszące się do sposobów oddziaływania na uczniów (Strykowski, 2005, s. 16)

Obecnie mówi się również o dydaktyce wczesnej edukacji w ujęciu konstruktywistyczno-interpretatywnym (Klus-Stańska, 2018). Konstruktywizm wywodzi się z koncepcji progresywizmu J. Deweya. Najwcześniejsi przedstawiciele tego nurtu, J. Piaget, L.S. Wygotski, J. Bruner, stworzyli fundamenty dla obecnie wielu już odmian konstruktywizmu (Piotrowska, 2008, s. 42 i dalsze). Jednak łącząca je koncepcja zakłada, że w edukacji konstruktywistycznej największy nacisk kładzie się na aktywność ucznia, dzięki której ciężar edukacyjny przenosi się z procesu nauczania na uczenie się przejawiające się przede wszystkim w dziecięcym badaniu i eksperymentowaniu, odkrywaniu, samodzielnym tworzeniu znaczeń czy uzasadnianiu własnych opinii. Kompetencje dydaktyczne podlegają w związku z tym istotnej ewolucji i znacznie trudniej je szczegółowo zdefiniować. Kierownicza rola nauczyciela ulega w tej koncepcji zupełnej transformacji w kierunku wspierania samodzielności uczniów, a istotnie większą uwagę poświęca się budowaniu środowiska uczenia się w klasie (Dumont, Istance, Benavides, 2013, s. 51 i dalsze). Nauczyciel ma pełnić rolę wspierającą, nie pierwszoplanową, opisaną między innymi takimi umiejętnościami, jak:

- stawianie przed uczniami odpowiednich problemów do rozwiązania,
- organizowanie zajęć wokół znanych uczniowi pojęć,

– zachęcanie uczniów do zadawania pytań,
– akceptacja uczniowskiego podejścia do problemu,
– rozpoznawanie wiedzy osobistej uczniów,
– inspirowanie do tworzenia uogólnień,
– używanie precyzyjnej i naukowej terminologii: zbadaj, skonstruuj itp. (Dylak, 2000, s. 71–72).

Zróżnicowanie postrzegania kompetencji dydaktycznych nauczyciela wymaga głębokiego namysłu nad relacją między wiedzą merytoryczną i dydaktyczną nauczyciela, która w ujęciu konstruktywistycznym wydaje się tracić tradycyjną rozłączność obu obszarów na rzecz ich interferencji.

MERYTORYCZNE I DYDAKTYCZNE KOMPETENCJE W ZAKRESIE MATEMATYKI WCZESNOSZKOLNEJ

Matematyczne przekonania studentów wczesnej edukacji stanowią rudymenty rozwijanych na studiach i później, w pracy zawodowej, kompetencji dydaktycznych, a więc praktyk edukacyjnych mających na celu budowanie wiedzy matematycznej uczniów. Identyfikowanie osobistych teorii związanych z nauczaniem matematyki wczesnoszkolnej pozwala rozpoznawać rodzaj skonstruowanej przez przyszłych nauczycieli wczesnej edukacji wiedzy matematycznej i dydaktycznej. Na przykład sposoby radzenia sobie z niektórymi zadaniami matematycznymi odsłaniają nie tylko studenckie kompetencje matematyczne, ale również przekonania, czym jest wczesnoszkolna wiedza matematyczna, jak jej używać i jak ją tworzyć.

Matematyczna wiedza merytoryczna w edukacji wczesnoszkolnej jest potocznie rozumiana jako zestaw algorytmów (cztery podstawowe działania, rozwiązywanie zadań typowych, zapis formalny), które w dodatku są przekazywane w gotowej postaci uczniom. W ujęciu konstruktywistycznym ma ona odmienne cechy, których istnienie może nie być uświadamiane sobie przez niektórych nauczycieli i studentów edukacji wczesnoszkolnej. Odnosi się bardziej do rozumienia relacji matematycznych, dostrzegania prawidłowości, rozumowania i uogólniania.

Kompetencje dydaktyczne tradycyjnie były (a często są nadal – szczególnie w odniesieniu do wczesnoszkolnej matematyki) ujmowane z perspektywy aktywności nauczyciela: Jak zorganizować lekcję? Jakie zaproponować metody? W sposób dość oczywisty przyjmowano, że skuteczny nauczyciel osiągnie zaplanowane cele, jeśli zastosuje dobre metody. Takie myślenie prowadziło wielu nauczycieli wczesnej edukacji do pewności, że wyuczenie się określonej liczby metod dydaktycznych (metod „przekazywania wiedzy") będzie solidną bazą dla kierowania uczniem i budowania jego wiedzy matematycznej. W podejściu konstruktywistycznym na plan pierwszy wysuwa się raczej umiejętność interpretacji zjawisk pedagogicznych, a proces uczenia się nauczycieli jest długotrwały. Towarzyszyć muszą mu jednak, jak stwierdza S. Dylak przytaczając modele kształcenia nauczycieli konstruktywistycznych, odpowiedzialność za ten proces oraz zainteresowanie własnym uczeniem się, które odbywa się przez rekonstruowanie

posiadanej wiedzy (Dylak, 2000, s. 73 i dalsze). Poniższa tabela przedstawia główne różnice w obu podejściach do uczenia się matematyki, wskazując podstawowe cechy wczesnoszkolnej matematycznej wiedzy merytorycznej i dydaktycznej w dwóch ujęciach: tradycyjnym i konstruktywistycznym.

Tab. 1. Wczesnoszkolne kompetencje matematyczne w dwóch ujęciach poznawczych

	Tradycyjne podejście		Konstruktywistyczne podejście	
	Nauczyciel	Uczeń	Nauczyciel	Uczeń
Wiedza **merytoryczna**	Zestaw algorytmów przekazywanych głównie przez nauczyciela i podręcznik	Odtwarzanie algorytmów, zastosowanie w zadaniach zgodnie z oczekiwaniami nauczyciela	Badanie relacji matematycznych, odkrywanie prawidłowości matematycznych oraz uzasadnianie ich i umiejętność powiązania z pojęciami matematycznymi w starszych klasach	Nadawanie pojęciom matematycznym wielokontekstowych znaczeń, budowanie narzędzi radzenia sobie z problemem matematycznym (manipulowanie przedmiotami, rysunek, matematyzowanie)
Wiedza **dydaktyczna**	Zestaw metod i form pracy na lekcji jako ogólnoprzedmiotowe kompetencje do organizowania lekcji		Formułowanie problemów matematycznych, zadawanie pytań o prawidłowości matematyczne, organizowanie badań relacji matematycznych na przedmiotach	

Źródło: opracowanie własne

We wczesnej edukacji matematycznej konstruktywizm jest postulowany w teoretycznych opracowaniach, ale nadal brakuje wystarczającej liczby egzemplifikacji w postaci propozycji lekcji czy zestawu problemów matematycznych do rozwiązywania przez najmłodszych uczniów. Badania pokazują, że codzienność szkolna w klasach początkowych odbiega zdecydowanie od konstruktywistycznego podejścia. Na przykład wśród nauczycieli wczesnej edukacji, którzy zostali poproszeni o zaplanowanie dydaktycznych kroków w celu poprawienia wyników rozwiązania zadania nietypowego, jedynie 6% położyło nacisk na samodzielną pracę uczniów (Czajkowska, Bugajska-Jaszczołt, 2016, s. 200). Działania uczniów są kierowane szczegółowymi wskazówkami nauczycieli, a rozwiązywanie zagadek czy problemów matematycznych jest nadal nieczęstym doświadczeniem uczniów (por. Dagiel, Żytko, 2009). Przyczyny tego stanu rzeczy są upatrywane w niskich kompetencjach matematycznych nauczycieli, braku ich osobistych doświadczeń samodzielnego konstruowania wiedzy matematycznej czy tradycyjnego podejścia do uczenia się matematyki ujawnianego w propozycjach podręcznikowych (Klus-Stańska, Nowicka, 2014). Badania anglosaskie i polskie pokazują również silniejszy lęk przed matematyką studentów wczesnej edukacji niż innych specjalności. Nauczycielki wczesnej edukacji preferują wówczas tradycyjny model nauczania, prze-

kazując prawdopodobnie uczniom własne obawy (Szczygieł, Cipora, 2016, s. 96 i dalsze).

Badania S. Kraussa i in. pokazują, że powiązania między wiedzą merytoryczną i wiedzą jak uczyć są najsilniejsze wśród tych nauczycieli matematyki, którzy uczą na najwyższym poziomie nauczania (Krauss, i in., 2008). Może to świadczyć o potrzebie głębokiego rozumienia matematyki dla budowania umiejętności dydaktycznych.

Niestety, matematyczne kompetencje dydaktyczne konstruktywistycznych nauczycieli wczesnej edukacji muszą być odmienne od zdecydowanej większości ich doświadczeń szkolnych, a umiejętności organizowania procesu edukacji wczesnoszkolnej matematyki powinny obejmować w szczególności:

– umiejętność określenia poziomu wiedzy osobistej ucznia (dawanie zadań nietypowych, rozwiązywanie problemów matematycznych, stymulowanie do zadawania pytań przez ucznia),
– umiejętność organizowania matematycznego środowiska uczącego i akceptacja odmiennych aktywności ucznia (swobodny dostęp ucznia do wszelkich pomocy dydaktycznych, bogate wyposażenie w pomoce klasy),
– umiejętność budowania u uczniów możliwości rozwijania narzędzi myślenia – radzenia sobie z problemami matematycznymi (badanie przedmiotów, rysowanie, konkretyzacja itp.),
– umiejętność akceptowania i wykorzystania błędnych koncepcji uczniowskich do rozwijania ich myślenia,
– umiejętność wycofania się z pozycji kierowniczej.

Powstaje jednak pytanie, jaka wiedza merytoryczna będzie umożliwiać rozwój powyższych umiejętności konstruktywistycznych nauczyciela.

METODOLOGIA BADAŃ

Celem podjętych badań była próba rozpoznania potocznych koncepcji dotyczących merytorycznej wiedzy matematycznej w zakresie rozwiązywania zadań tekstowych z klas początkowych ujawnianych przez studentów wczesnej edukacji. Problemy badawcze ujęto w postaci dwóch pytań: **Jaka jest matematyczna wiedza merytoryczna badanych studentów? Jakie mogą być jej związki z ich wiedzą dydaktyczną?**

Badaniom zostało poddanych 169 studentów wczesnej edukacji (I stopień studia stacjonarne i niestacjonarne – 111 osób oraz II stopień studia niestacjonarne – 54 osoby). Był to dobór celowy, a studenci nie uczestniczyli jeszcze w zajęciach z edukacji matematycznej, ponieważ istotnym zamierzeniem badawczym było rozpoznanie ich umiejętności w zakresie rozwiązywania zadań tekstowych z klas początkowych, czyli strategii radzenia sobie, jakie uruchamiali korzystając z doświadczeń szkolnych. Wcześniej podejmowane badania polskich studentów wskazywały, że przyszli nauczyciele wczesnej edukacji nie umieją i nie lubią matematyki. W raporcie z badań TEDS-M ujawniono niskie kompetencje dydaktyczne studentów pedagogiki już na poziomie szkoły podstawowej i ich trudności z dostrzeganiem prawidłowości oraz uzasadnia-

niem. Okazało się również, że ponad 50% z nich uzyskiwało z matematyki oceny przeciętne lub najniższe w klasie (Czajkowska, Jasińska, Sitek, 2010). Jednak w tych badaniach studenci mieli się wykazać przede wszystkim wiedzą matematyczną na poziomie szkoły podstawowej, a więc dotyczącą głównie ułamków i innych zagadnień przede wszystkim z klas IV–VI. W niniejszych badaniach chodziło o rozpoznanie, jak studenci wczesnej edukacji sobie radzą z zadaniami z pierwszego poziomu poznawania matematyki w szkole.

Badani studenci zostali poproszeni o wypełnienie ankiety i ustosunkowanie się do 14 stwierdzeń związanych z wczesnoszkolną edukacją matematyczną, a następnie o rozwiązanie 10 zadań tekstowych. Zostali również zobligowani do niestosowania równań z niewiadomą. Strategie uruchamiane przez badanych zostały poddane pogłębionej analizie. Wyniki przedstawione w tym tekście stanowią część szerszych badań i odnoszą się jedynie do sposobów rozwiązywania wybranych zadań tekstowych.

Wśród proponowanych do badań zadań, pięć miało charakter typowy, a pięć stanowiło zadania nietypowe. **Zadania typowe** charakteryzowały się łatwym do odkrycia modelem rozwiązania, ponieważ miały charakterystyczne słowa w tekście (na przykład: o ile więcej? ile jest razem?). Są to zadania najczęściej pojawiające się w podręcznikach i zeszytach ćwiczeń. Uczeń rozwiązując ten typ zadań często odwołuje się do pamięci (na przykład: jak to się robiło? na co to było?). **Zadania nietypowe** natomiast definiuję jako takie, w których nieznany jest model rozwiązania, a dziecko musi uruchomić wiedzę produktywną, odwołać się do wiedzy osobistej i nadać własne znaczenia sytuacji opisanej w zadaniu.

Treść poszczególnych zadań przedstawiono poniżej.

Zadania typowe

Zad. 1. Sześć zeszytów kosztowało 12 zł, a osiemnaście ołówków kosztowało 16 zł. Ile kosztowały razem zeszyty i ołówki?

Zad. 2. Hania ma 15 cukierków. Oddała Jankowi kilka cukierków i zostało jej tylko 9 cukierków. O ile mniej cukierków ma teraz Hania?

Zad. 3. Jaki będzie dzielnik, jeśli dzielna jest równa 24, a iloraz 6?

Zad. 4. Pierwszego dnia pani Bożena kupiła 6 filiżanek, a drugiego dnia 8 filiżanek. Za wszystkie zakupy zapłaciła 42 zł. Ile kosztowała jedna filiżanka?

Zad. 5. Wzdłuż całej ulicy Warszawskiej zbudowano ogrodzenie z siatki, które ma 15 przęseł. Jaką długość ma ulica Warszawska, jeśli jedno przęsło ma długość 3 m?

Zadania nietypowe

Zad. 1. Sześć zeszytów i 18 ołówków kosztuje 54 zł. Ile będą kosztować 4 zeszyty i 12 ołówków?

Zad. 2. Janek i Hania mają po tyle samo cukierków. Hania oddała 4 cukierki Jankowi. O ile więcej cukierków ma teraz Janek niż Hania?

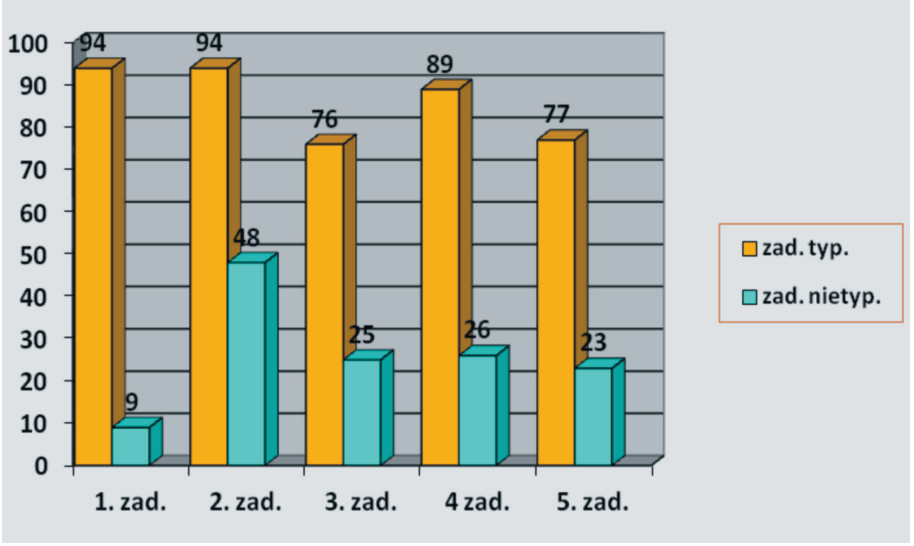
Zad. 3. Dzielnik jest 7 razy mniejszy od dzielnej. Jaki jest iloraz i dlaczego?

Zad. 4. Za 5 filiżanek i 5 talerzyków pani Bożena zapłaciła 40 złotych. Następnego dnia pani Bożena dokupiła jeszcze 3 filiżanki i 5 talerzyków z tego samego zestawu. Tym razem zapłaciła 30 zł. Ile kosztowała filiżanka, a ile talerzyk?

Zad. 5. Na ulicy, przy której mieszka Hania, posadzono 59 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Jaką długość ma ta ulica, jeśli na jej początku i na końcu będzie rosło drzewko?

Na potrzeby niniejszego tekstu analizie poddano jedynie dwa zadania nietypowe: zad. 1 i zad. 4. Na ich przykładzie chcę rozpoznać, jakie cechy ma wiedza merytoryczna badanych i wskazać potencjalne związki między ich wiedzą merytoryczną i dydaktyczną.

Poniższy rysunek przedstawia odsetki poprawnych rozwiązań.



Rys. 1. Procentowe wyniki poprawnych rozwiązań zadań typowych i nietypowych

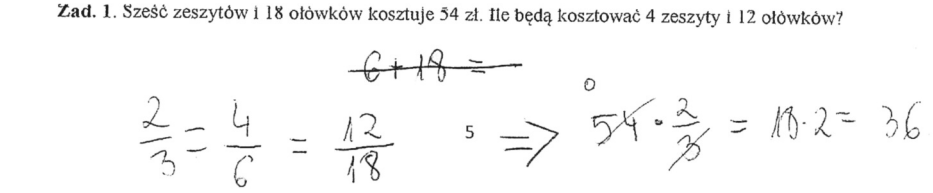
Już same wyniki procentowe poprawnych rozwiązań są bardzo niepokojące. Badani studenci wczesnej edukacji mieli duże trudności w rozwiązywaniu zadań nietypowych. W zakresie zadań typowych brak stuprocentowo poprawnych wyników był najczęściej efektem opuszczenia tej części ankiety. Błędne rozwiązania były incydentalne i dotyczyły głównie mylenia nazw: dzielna, dzielnik, iloraz. Rozwiązania zadań nietypowych miały zupełnie inną charakterystykę. Badani znacznie rzadziej podejmowali próby i często były one nieskuteczne. Odsetek opuszczeń w zadaniu nr 1 wynosił 56% badanych, a w zadaniu nr 4 – dokładnie 50%. Uruchamiane przez nich strategie były często bezowocne i bardzo mało zróżnicowane. Interesujące jest również, że do zadania nr 1 co piąty badany wypisywał dane z zadania, ale nie było to pomocą w uzyskaniu poprawnego rozwiązania. Do zadania nr 4 ten sposób porządkowania informacji zastosowało tylko 12% badanych.

WYBRANE STRATEGIE WYKONYWANIA DZIAŁAŃ NA LICZBACH W NIETYPOWYM ZADANIU NR 1

Poprawne strategie matematyzowania

Podejmowane przez studentów próby rozwiązania tego zadania polegały przede wszystkim na analizowaniu liczb i wykonywaniu na nich działań. Ta strategia została wykorzystana w jednej czwartej wszystkich rozwiązań. Niektóre kończyły się sukcesem (36% z nich), ale większość badanych nie potrafiła uzyskać w ten sposób poprawnego rozwiązania.

Wśród prawidłowych odpowiedzi pojawiały się sposoby, w których badani dostrzegli, że dane są ze sobą w określonym stosunku 2/3.



Jest to poprawna strategia, którą jednak trudno przełożyć na język pojęć wczesnoszkolnych. Nauczyciel, który potrafi zadanie tak rozwiązać, wykazuje się wiedzą merytoryczną, ale niekoniecznie dydaktyczną, ponieważ może sądzić, że to zadanie jest za trudne dla uczniów z klas I–III, niemających wiele doświadczeń z ułamkami zwykłymi.

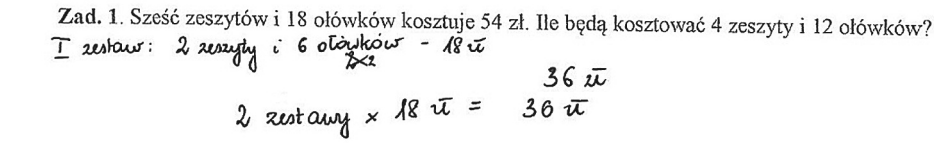
Jedynie w **dwóch przypadkach** pojawiło się rozwiązanie, którego źródłem jest rozumienie relacji proporcjonalności na poziomie wyobrażeniowym i który mógłby być przedmiotem badań najmłodszych uczniów. W pierwszym studentka zauważyła, że te przedmioty można łączyć w zestawy, z których każdy będzie miał taką samą cenę, ponieważ będą jednakowe.

Pierwszy przykład wyjaśniony został na poziomie matematyzowania – za pomocą działań. Studentka podała następujące obliczenia:

$$54 : 3 = 18 \qquad 54 - 18 = 36$$

Fakt odjęcia jednej „osiemnastki" świadczy o rozumieniu, że muszą zostać jeszcze dwie.

Druga strategia rozwiązania mogłaby być przykładem problemu dla uczniów, którzy manipulując przedmiotami mogliby tworzyć intuicyjne rozumienie proporcjonalności, a w przyszłości lepsze rozumienie ułamka, jako stosunku dwóch liczb.



Jak słusznie bowiem zalecał S. Turnau, „elementarne pojęcia matematyczne powinny mieć swe źródło w intuicjach wywodzących się z autentycznych zastosowań. Kształtując pojęcie ułamka, należy odwoływać się do tych przykładów, które do dzisiaj nie straciły swej aktualności. Należy do nich wyrażenie ułamkiem stosunku dwóch

liczb" (Turnau, 1988, s. 13). Nauczyciel, który rozumie relację proporcjonalności w ten sposób, będzie w stanie zaproponować uczniom zajmowanie się rozwiązaniem tego rodzaju sytuacji życiowych, rozumiejąc potrzebę budowania takich doświadczeń uczniów.

Niepoprawne strategie matematyzowania

Wśród nieprawidłowych rozwiązań najczęściej pojawiały się takie, które polegały na dość swobodnym „żonglowaniu" liczbami, które pełniły rolę obiektów zupełnie oderwanych od znaczeń nadanych im w treści zadania.

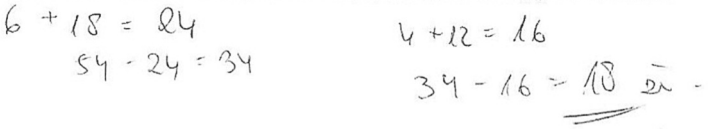
W poniższym przykładzie niepoprawnej matematyzacji, który pojawił się kilkukrotnie, obliczono liczbę wszystkich przedmiotów i podzielono przez nią całą kwotę pieniędzy.

$$54 : 24 = 2{,}25 \qquad 2{,}25 \cdot 16 = 36$$

Ta strategia prowadziła do uzyskania liczbowo poprawnego wyniku jedynie dlatego, że cena poszczególnych przedmiotów nie zmienia relacji, więc jeśli liczba przedmiotów zmieniała się proporcjonalnie – kwota również. Cena jednego zeszytu czy jednego ołówka mogła wyrażać się różnymi liczbami i w różnych układach. Nie mamy żadnej przesłanki, że była to ta sama liczba, dlatego ta strategia nie jest poprawna .Może być również skutkiem przekonania, że wynik jest najważniejszy, a proces myślenia jakby mniej. Można również przypuszczać, że część badanych nie miała świadomości powyższych wątpliwości co do poprawności tego rozwiązania.

Najbardziej liczne przykłady manipulowania liczbami (9%) ukazywały jednak brak jakiegokolwiek logicznego powiązania działań z relacjami między obiektami w zadaniu.

Zad. 1. Sześć zeszytów i 18 ołówków kosztuje 54 zł. Ile będą kosztować 4 zeszyty i 12 ołówków?



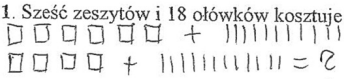
Autorka tego rozwiązania odejmuje liczbę przedmiotów od liczby pieniędzy, uznając być może, że zmniejszanie się liczb w treści zadania może być związane z odejmowaniem. Podobną strategią posługują się często dzieci w klasie trzeciej, dopasowując działanie do liczb. Podczas rozwiązywania analogicznego, dotyczącego proporcjonalności zadania (*Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?*), niespełna jedna piąta trzecioklasistów stosowała strategie „spójrz na liczby i dopasuj działanie" oraz wykonywanie obliczeń, które były jakoś związane z danymi w zadaniu, ale okazały niepoprawne. Co ciekawe, w roku 2010 aż 34% uczniów z klas trzecich potrafiło rozwiązać to zadanie (por. Dąbrowski, 2011, s. 132 i dalsze), co stanowi imponujący rezultat wobec badanych studentów (9%).

Strategie rysunku

W klasach początkowych jest niezbędne rozwijanie umiejętności przedstawiania na rysunku zależności występujących w treści zadania. Badani studenci natomiast bardzo niechętnie wykorzystywali rysunek. Jednak, pomimo tego, że w kilku przypadkach został on wykonany, nie wystarczył do poprawnego rozwiązania zadania. Podejmowane przez badanych próby odsłaniały brak umiejętności wykorzystania wyobrażeniowych relacji między „bohaterami" zadania.

W poniższym przykładzie badany nie potrafił uchwycić zależności z zadania w postaci równych części, a rysunek bardziej odpowiada myśleniu „równaniowemu". Użył liniowego analizowania treści zadania, przedstawiając rysunkiem kolejne informacje liczbowe, ale nie dostrzegając powiązań między nimi.

Zad. 1. Sześć zeszytów i 18 ołówków kosztuje 54 zł. Ile będą kosztować 4 zeszyty i 12 ołówków?



Aż 21% badanych zapisało dane z zadania w postaci liczb, ale nie potrafiło z tego skorzystać. Brak umiejętności rozwiązania tego zadania, a także fakt, że poprawne strategie przedstawione przez studentów sytuują rozumienie problemu (lub jego brak) na poziomie starszych klas, rodzi obawy o akceptację podejmowania prób radzenia sobie z tego typu zadaniami przez najmłodszych uczniów. Wskazuje również na niedostrzeżenie istoty proporcjonalności na wczesnoszkolnym poziomie edukacyjnym. Przyszli nauczyciele często nie mają wiedzy merytorycznej polegającej, w tym przypadku, na rozdzielaniu i łączeniu przedmiotów w równe części i zauważeniu, że temu samemu procesowi musi podlegać cena. Mogą w efekcie znacząco ograniczać doświadczanie badań przez uczniów, nie rozumiejąc ich związku z pojęciem proporcjonalności. Brak takiej wiedzy może być jedną z przyczyn niedostatecznego rozumienia pojęcia ułamka polskich studentów wczesnej edukacji (por. Czajkowska, Jasińska, Sitek, 2010).

Jednostkowo pojawiły się rozwiązania za pomocą układu równań, choć nie zawsze prowadziły do sukcesu. Rozwiązanie takich zadań za pomocą równania może potwierdzać przekonanie o ich zbyt wysokim poziomie trudności dla edukacji wczesnoszkolnej (w tym wieku dzieci nie dysponują przecież takim narzędziem matematyzowania), a więc nawet świadomej eliminacji ich z propozycji dla najmłodszych uczniów.

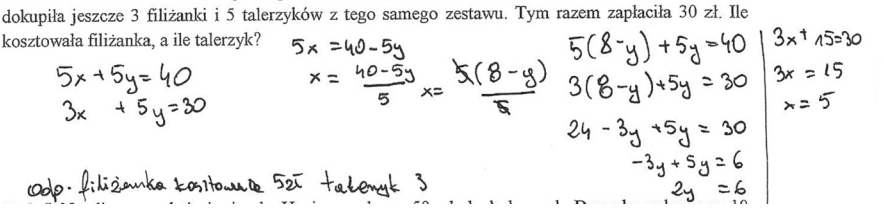
ZADANIE NIETYPOWE NR 4

Poprawna strategia matematyzowania

Zadanie to było związane z codzienną sytuacją kupowania, choć problem zawarty w treści nie był typowy. Zależności zawarte w treści sprzyjają budowaniu głębszego rozumienia relacji między liczbą przedmiotów i ich ceną. Jednocześnie to zadanie jest typowe na poziomie wprowadzania w szkole układu równań. Być może dlatego, spośród 44 (26%) poprawnych rozwiązań 7 przedstawiało układ równań, pomimo wielokrotnie powtarzanej prośby o ich nieużywanie.

Poniżej przykład takiego rozwiązania.

Zad. 4. Za 5 filiżanek i 5 talerzyków pani Bożena zapłaciła 40 złotych. Następnego dnia pani Bożena dokupiła jeszcze 3 filiżanki i 5 talerzyków z tego samego zestawu. Tym razem zapłaciła 30 zł. Ile kosztowała filiżanka, a ile talerzyk?



Autorka wybrała najbardziej skomplikowaną strategię rozwiązywania układu równań. Być może, niedostatek w przeszłości możliwości rozwiązywania takich problemów nie pozwolił jej dostrzec strategii odejmowania równań stronami, jako najefektywniejszej w tej sytuacji. Przedstawienie rozwiązania w taki sposób odrywa wykonywanie poszczególnych kroków matematyzacji od wyobrażeń relacji opisanych w zadaniu. Kompetencje merytoryczne przyszłych nauczycieli, którzy rozwiązali za pomocą równania lub zaczynali w ten sposób myśleć o rozwiązaniu, mogą być źródłem budowania przekonania o bardzo wysokiej trudności takiego zadania, a w konsekwencji odrzucenia go jako nieadekwatnego poziomem dla klas początkowych. Niemożliwe będzie wówczas tworzenie środowiska, w którym dzieci mogą spotykać się z takim problemami, na przykład: *Pięć batonów jest o 8 zł droższe niż trzy batony. Ile kosztuje jeden baton?* Przekonanie o wysokim poziomie trudności tego typu problemów zwalnia przyszłych nauczycieli z prób podnoszenia własnych kompetencji w tym zakresie.

Niepoprawna strategia matematyzowania

Wśród niepoprawnych odpowiedzi, obok opuszczenia zadania, pojawiała się strategia „żonglowania liczbami". W poniższym przykładzie autorka wykonuje działania zgodne bardziej z wybranymi przez nią kluczowymi słowami niż z sensem matematycznym tego zadania. Ponieważ jest *tyle i tyle*, to trzeba dodać. Ponieważ *razem* jest 40, to można podzielić, żeby wiedzieć, ile kosztuje *jeden*. Wówczas oblicza, ile kosztuje *trzy* i *pięć*, ponieważ w zadaniu spotyka kolejno takie liczby.

Zad. 4. Za 5 filiżanek i 5 talerzyków pani Bożena zapłaciła 40 złotych. Następnego dnia pani Bożena dokupiła jeszcze 3 filiżanki i 5 talerzyków z tego samego zestawu. Tym razem zapłaciła 30 zł. Ile kosztowała filiżanka, a ile talerzyk?

40 : 10 = 4

4 · 3 = 12

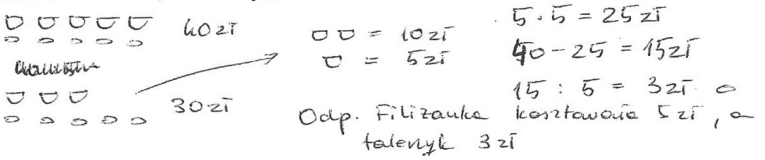
4 · 5 = [illegible]

Nieumiejętność nadania znaczeń liczbom w treści zadania matematycznego wskazuje na brak rozumienia relacji matematycznych. Nauczyciel wczesnej edukacji z kompetencjami merytorycznymi, przede wszystkim o charakterze instrumentalnym, nie będzie potrafił rozwijać rozumowania matematycznego najmłodszych uczniów.

Strategie rysunku

Interesujące jest, że jedynie w **sześciu przypadkach** został wykonany rysunek, który w tym zadaniu mógłby świetnie upoglądowić zależności. W poniższym rozwiązaniu można wyraźnie dostrzec wyobrażenia konkretnych filiżanek i talerzyków.

Zad. 4. Za 5 filiżanek i 5 talerzyków pani Bożena zapłaciła 40 złotych. Następnego dnia pani Bożena dokupiła jeszcze 3 filiżanki i 5 talerzyków z tego samego zestawu. Tym razem zapłaciła 30 zł. Ile kosztowała filiżanka, a ile talerzyk?



Wyobrażenia dotyczące treści zadań z tego poziomu edukacyjnego dotyczą doświadczeń codziennych. Każdy spotyka się z sytuacjami w sklepie, kiedy musi przeliczać wartości produktów i wybierać korzystniejszą cenę albo obliczać cenę jednostkową. Okazało się jednak, że dla większości badanych wyobrażenie sobie treści zadania w postaci naturalnej sytuacji było niemożliwe. Tak niepokojąco mała liczba prób wykonania rysunku może świadczyć o niskiej akceptacji takiej strategii rozwiązywania lub braku umiejętności ich wykonania. Koncepcja braku aprobaty dla tworzenia rysunków ogranicza kompetencje dydaktyczne przyszłych nauczycieli. Powinni oni bowiem tworzyć takie możliwości na lekcji, aby uczeń rozwijał umiejętność wizualizowania treści zadania w postaci rysunku. Potrzebne są intencjonalnie uruchamiane sytuacje poznawcze, ponieważ tworzenie rysunku (reprezentacji ikonicznej) jest niezbędnym etapem budowania rozumienia pojęć matematycznych (Bruner, 1978).

W rozwiązaniach studentów tylko w **jednym przypadku** pojawiła się strategia prób i błędów czy, jak słusznie nazywa ją M. Dąbrowski, „prób i poprawek"(Dąbrowski, 2008, s. 94). Brak takich prób może oznaczać, że przyszli nauczyciele wczesnej edukacji nie mają narzędzi do badania problemów matematycznych, na przykład przez podstawianie liczb i rozważanie zmian zachodzących w wyniku. Nie potrafią również zadawać sobie pytań niezbędnych w procesie badania relacji matematycznych: *Co będzie jeśli? Dlaczego tak jest? Dlaczego to nie działa?*

PODSUMOWANIE

Konstruktywistyczne kompetencje dydaktyczne w zakresie matematyki badanych studentów wczesnej edukacji są nieobecne w ich osobistych przekonaniach. Przedstawiona powyżej analiza strategii rozwiązywania zadań nietypowych przez badanych studentów wczesnej edukacji odsłania ich wiedzę merytoryczną pozbawioną umiejętności korzystania z rysunku, nastawioną na umiejętności instrumentalne oraz okrojoną z rozumienia relacji matematycznych. Można przypuszczać w związku z tym, że jako nauczyciele będą podejmowali działania wykluczające najmłodszych uczniów z możliwości zajmowania się problemami matematycznymi. Zmuszeni propozycją programową (i tak nieczęsto spotykaną), bez wiary w możliwości swoich uczniów, będą dysponować jedynym narzędziem dydaktycznym polegającym na pokazywaniu na tablicy sposobu rozwiązana i tłumaczeniu kolejnych kroków. H. Aebli już w połowie XX wieku wskazywał na nieskuteczność nauczycielskiego wyjaśniania uczniom nowych pojęć. Prowadzenie przez nauczyciela wykładu o operacjach a nie ich tworzenie przez uczniów opisywał jako mało skuteczne, a wręcz uniemożliwiające powstawanie właściwych umysłowych obrazów (Aebli, 1982, s. 131 i dalsze).

Wiedza merytoryczna nauczyciela matematyki nacechowana jedynie nieudolnymi próbami matematyzowania z wykorzystaniem liczb lub niewiadomych może być istotnym ograniczaniem dla jego kompetencji dydaktycznych. Badani przyszli nauczyciele wczesnej edukacji, dla których są to jedyne dostępne strategie, inaczej analizują treść zadania. Traktują dane liczbowe liniowo, zapisując je w konwencji równania, mniej

troszcząc się o dokładne zrozumienie historii opisanej treścią zadania. Nie rozumieją potrzeby umożliwiania doświadczeń uczniom, polegających na rozszerzaniu codziennych kontekstów pozaszkolnych i samodzielnym dokonywaniu prób ich matematyzowania. Mogą być skłonni do nacisku na kompetencje rachunkowe, traktując je jako najważniejsze w uczeniu się matematyki, nie posiadając jednocześnie umiejętności stawiania interesujących problemów. To ograniczenie dydaktyczne może być przeszkodą w wielokontekstowym poznawaniu pojęć matematycznych przez uczniów, bowiem do rozwijania rozumienia prawidłowości matematycznych związanych na przykład z zakupami nie wystarczy wypełnianie ćwiczeń związanych z obliczaniem reszty z zakupów. Istotniejsza jest tu dydaktyczna kompetencja nauczyciela, polegająca na zadawaniu zróżnicowanych pytań problemowych i zachęcaniu uczniów do ich rozstrzygania na konkretach. Żeby formułować takie problemy, nauczyciel musi mieć świadomość istnienia związanych z nimi prawidłowości, umiejętność ich uzasadnienia i doświadczenie w przeprowadzaniu takich badań.

Charakter matematycznej wiedzy merytorycznej studentów wczesnej edukacji został ukształtowany dużo wcześniej, zanim podjęli studia wczesnej edukacji. Może się więc okazać, że wiedza, z jaką przychodzą, skutecznie impregnuje ich na konstruktywistyczny model uczenia się. Silnie odciśnięte w umyśle doświadczenia były źródłem wytworzenia określonych cech wiedzy matematycznej w klasach początkowych, więc praca nad „inną" wiedzą może stawać się, w ich przekonaniu, niepotrzebnym balastem, a próby rozwijania konstruktywistycznych kompetencji dydaktycznych – mało skuteczne.

BIBLIOGRAFIA

Arends, R.I. (1994). *Uczymy się nauczać*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne SA.

Bruner, J. (1978). *Poza dostarczone informacje*. Warszawa: PWN.

Czajkowska, M., Jasińska, A., Sitek, M. (2010). *Kształcenie nauczycieli w Polsce. Wyniki międzynarodowego badania TEDS-M 2008*. Warszawa: Instytut Filozofii i Socjologii PAN.

Czajkowska, M., Bugajska-Jaszczołt, B. (2016). Jak nauczyciele i uczniowie rozwiązują zadania matematyczne, czyli o poprawnych i niepoprawnych rozumowaniach. *Problemy Wczesnej Edukacji*, *2*(33), 193–203.

Dagiel, M., Żytko, M. (red.) (2009). *Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów? Raport z badań.* Warszawa: CKE.

Dąbrowski, M. (2008). *Pozwólmy dzieciom myśleć*. Wyd. II. Warszawa: CKE.

Dąbrowski, M. (2013). *Za trudne, żeby myśleć*. Warszawa: CKE.

Dumont, H., Istance, D., Benavides, F. (2013). *Istota uczenia się. Wykorzystanie wyników badań w praktyce.* Warszawa: Wolters Kluwer Polska SA.

Dylak, S. (1995). *Wizualizacja w kształceniu nauczycieli.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.

Dylak, S. (2000). Konstruktywizm jako obiecująca perspektywa kształcenia nauczycieli. W: H. Kwiatkowska, T. Lewowicki, S. Dylak (red.), *Współczesność a kształtowanie nauczycieli* (s. 63–82). Warszawa: WSP ZNP.

Rumelhart, D.E. (2007). Schematy – cegiełki poznania. W: Z. Chlewiński (red.), *Psychologia poznawcza w trzech ostatnich dekadach XX wieku* (s. 431–454). Gdańsk: GWP.

Klus-Stańska, D. (2018). *Paradygmaty dydaktyki. Myśleć teorią o praktyce.* Warszawa: PWN.

Klus-Stańska, D., Nowicka, M. (2014). *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Gdańsk: Harmonia Universalis.

Krauss S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology*, *100*(3). Pobrano 26 stycznia, 2018, z http://psycnet.apa.org/doiLanding?doi=10.1037%2F0022-0663.100.3.716

Murphy, G.L., Medin D.L. (2007). Rola teorii w spójności pojęć. W: Z. Chlewiński (red.), *Psychologia poznawcza w trzech ostatnich dekadach XX wieku* (s. 311–347). Gdańsk: GWP.

Piotrowska, E. (2008). *Społeczny konstruktywizm a matematyka*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Strykowski, W. (2005). Kompetencje współczesnego nauczyciela. *Neodidagmata*, *27/28*, 15–29.

Szczygieł, M., Cipora, K. (2016). Lęk przed matematyką przyszłych nauczycieli edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej. Jak uczyć, kiedy sama się boję? *Problemy Wczesnej Edukacji*, *2*(33), 89–101.

Treliński, G. (2015). Integracja nauczania – uwarunkowania, praktyka. W: Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński, B. Bugajska-Jaszczołt, M. Czajkowska, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka* (s. 197–222). Kielce: Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP Spółka z o.o.

Turnau, S. (1988), Wprowadzenie do nauki o ułamkach. W: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela* (s. 11–24, tom 4). Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

MATHEMATICAL COMPETENCE OF FUTURE EARLY CHILDHOOD TEACHERS AS A POTENTIAL SOURCE OF THEIR METHODOLOGY: A CONSTRUCTIVIST PERSPECTIVE

ABSTRACT: Mathematical didactic knowledge in teachers of early childhood education is commonly perceived as a set of instructional methods for teaching pupils the basic concepts. Students of early childhood education have personal school experience and mathematical beliefs built on this basis. The ability (or lack thereof) to solve mathematical tasks from the level of initial classes also reveals future teachers' understanding of what mathematical knowledge is and its development in school. The research results

on early childhood education students show their insufficient competence in solving untypical tasks, which may create difficulties in launching constructive didactic competences in the future.

KEYWORDS: students of early childhood education, mathematical knowledge, understanding mathematical relationships